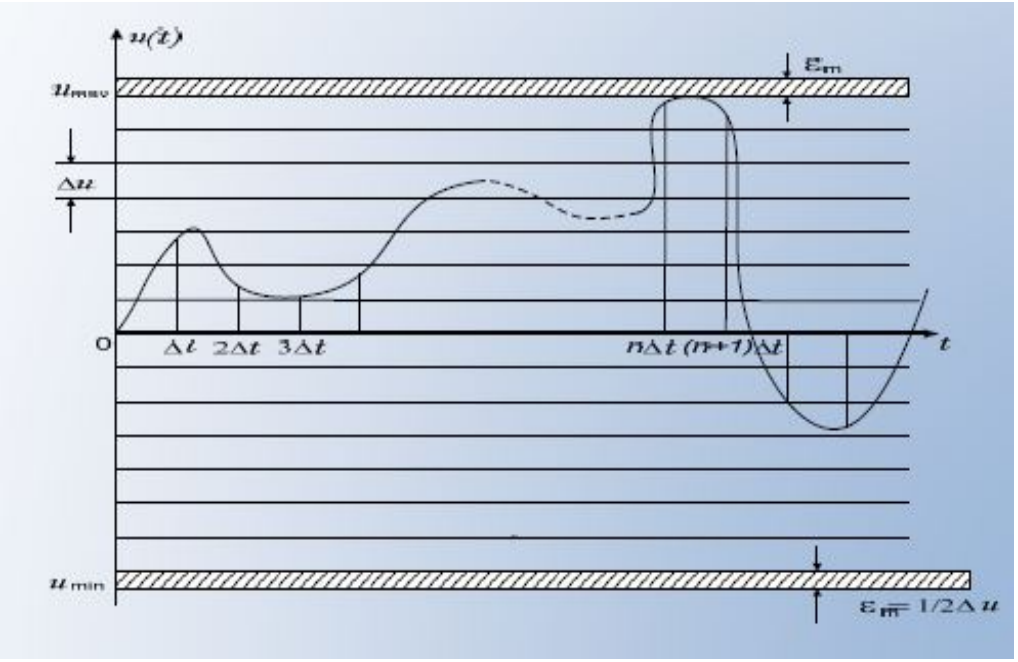
Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

- Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala
- Greška
  - ravnomjerne kvantizacije
  - neravnomjerne kvantizacije

Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

- Kontinualni signal *u(t)* može imati bilo koju vrijednost između U_{min} i U_{max}
- Neka signal u(t) ima ograničeni spektar koji se nalazi u intervalu učestanosti od *0* do f_m.
- Ako se primijeni teoremu o odabiranju, signal *u(t)* se može predstaviti skupom diskretnih vrijednosti uzetih u trenucima odabiranja n∆t.



Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

- Za neku drugu poruku dobiće se na isti način drugi skup diskretnih vrijednosti signala koji ga predstavlja, za treću dobiće se treći skup itd.
- Svaki odbirak može imati bilo koju vrijednost između U_{min} i U_{max}, tako da bi za predstavljanje skupa poruka ovakvog izvora bio potreban alfabet koji bi imao beskonačno mnogo simbola. Zato je neophodno obaviti diskretizaciju po trenutnoj vrijednosti signala.
- U realnim uslovima u svim komunikacionim sistemima postoje smetnje koje mogu da maskiraju signale. Korisnik poruke, sa svoje strane, raspolaže nekom konačnom osjetljivošću prijema, odnosno konačnom moći rezolucije. Zbog ovoga, signali koji se vrlo malo razlikuju među sobom, interpretiraju se gotovo identično. Kao posljedica ovih činjenica, prirodno se javlja ideja da je moguće prenos obaviti sasvim korektno i uz izvjesne greške.

Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

- Neka je dozvoljena greška u reprodukciji trenutne vrijednosti signala označena sa ε_m
- Prenos će biti "vjeran", ako se trenutna vrijednost signala poruke *u(t),* odbirak, reprodukuje bilo kojom njenom vrijednošću $u_\varepsilon(t)$ koja se nalazi u intervalu:

$$u(t)-\varepsilon_m \leq u_\varepsilon(t) \leq u(t)+\varepsilon_m$$

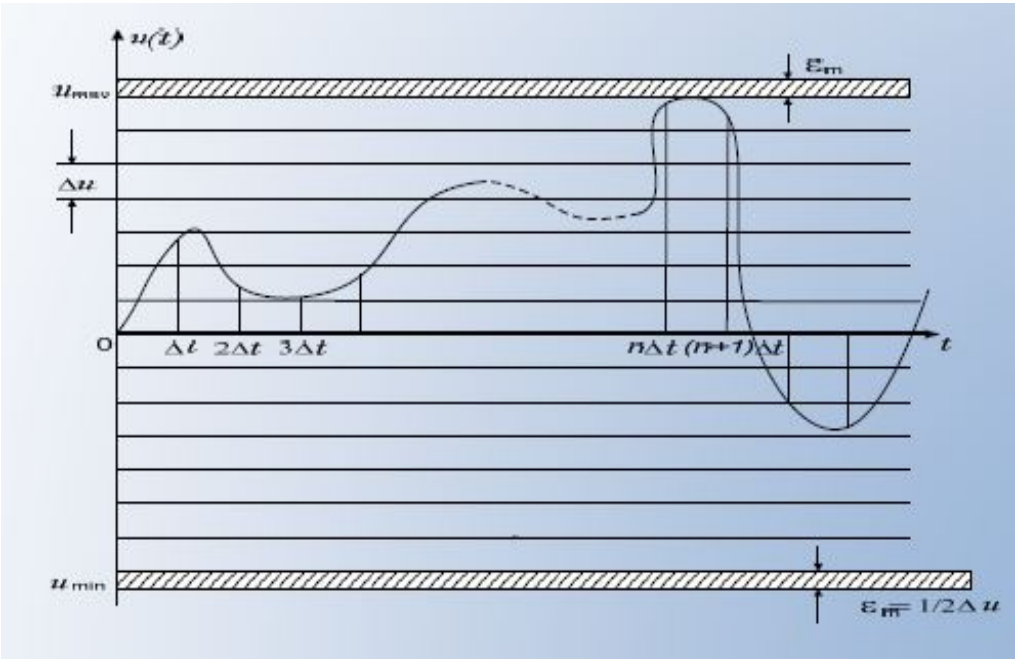
- Drugim riječima, sve vrijednosti *u(t)* koje se nalaze u ovom intervalu obrazuju jednu klasu. Njena je osobina da se bilo koja trenutna vrijednost iz te klase, na prijemu reprodukuje na isti način. Ovo pruža mogućnost da se zahvaljujući kriterijumu o vjernosti reprodukcije poruke, cio raspoloživi dijapazon trenutnih vrijednosti kvantizira korakom:

$$\Delta u = 2\varepsilon_m$$

Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

Umjesto svih mogućih vrijednosti amplituda u(t) koje se nalaze u prethodno definisanom intervalu, prenosi se samo jedna vrijednost, odnosno predstavnik te klase. Sa slike se vidi da je broj kvantizacionih nivoa:

$$q = \frac{u_{\max} + |u_{\min}|}{2\varepsilon_m}$$

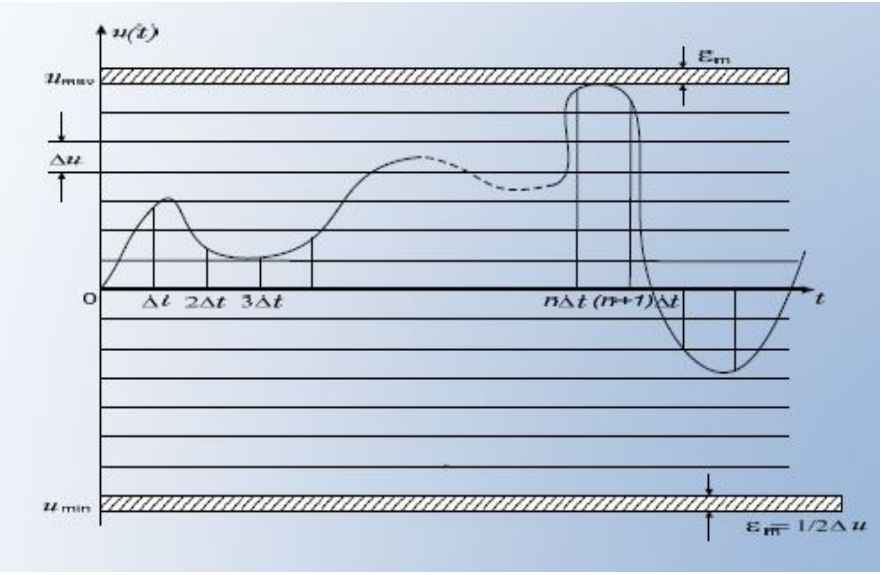


Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala

Kako je za mnoge realne poruke $U_{max} = |U_{min}|$, broj kvantizacionih niova je:

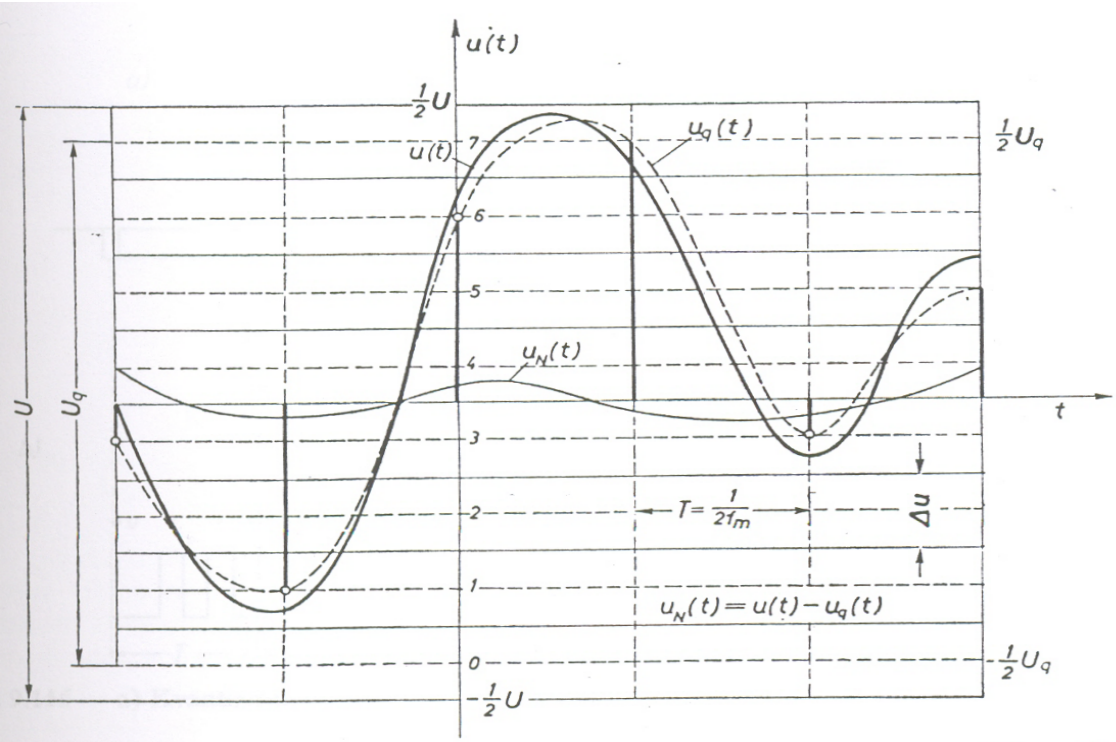
$$q = \frac{U_{\max}}{\varepsilon_m}$$

Iz ovog izraza se vidi da će za date vrijednosti U_{min} i U_{max}, veličina q biti konačna. Pri prenosu skupa poruka biće potrebno prenijeti sve moguće kvantizirane vrijednosti odbiraka. Kako njih ima q, to je jasno da i alfabet koji će služiti za prenos ovih poruka mora imati q različitih simbola.



Greška kvantizacije

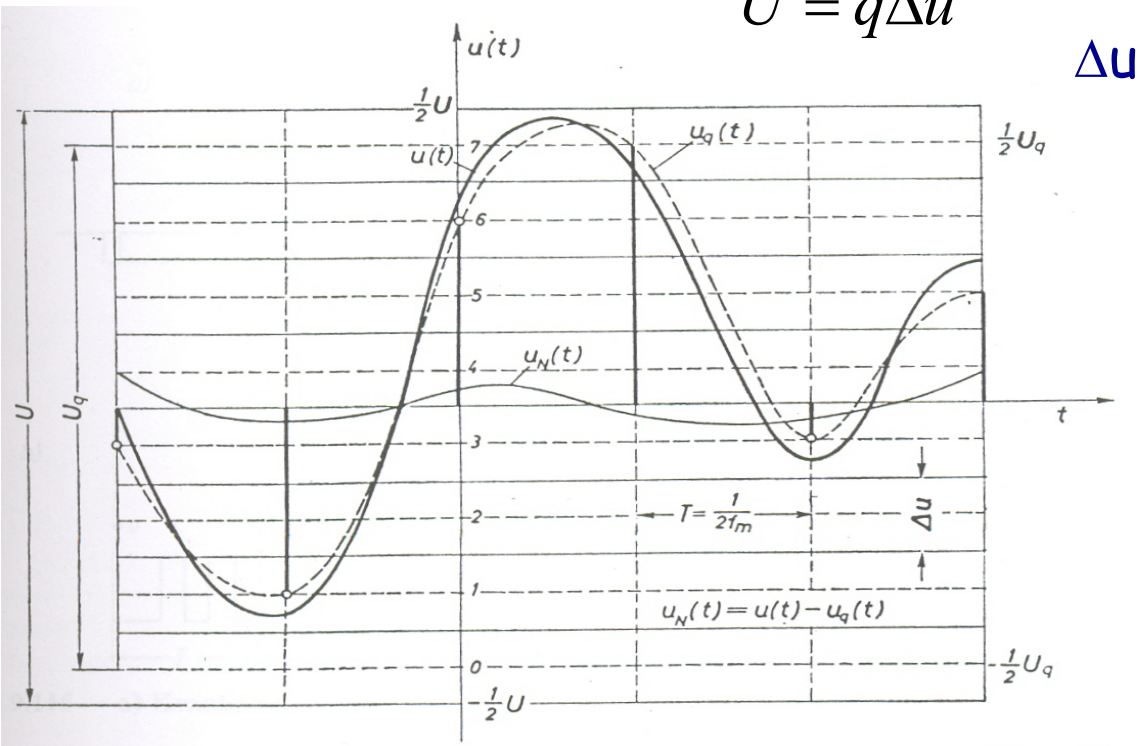
Neka je u(t) signal poruke maksimalne učestanosti u spektru f_m. Umjesto da se prenosi ovaj signal, mogu se prenositi njegovi odbirci koji predstavljaju vrijednosti signala u(t) u trenucima odabiranja $t=nT=n/2f_m$, gdje je n = 0, ±1, ±2. . . Prije prenosa odbiraka izvršava se njihova kvantizacija.



Greška kvantizacije

Neka je signal u(*t*) takav da se sve njegove pozitivne i negativne vrijednosti nalaze u intervalu *[-U/2, U/2]*. Neka se "zaokruživanje" vrijednosti amplituda odbiraka vrši tako da dozvoljena greška ne bude veća od ±1/2Δu. To znači da se interval *U dijeli* na *q* podintervala, tako da je:

$$U = q\Delta u$$

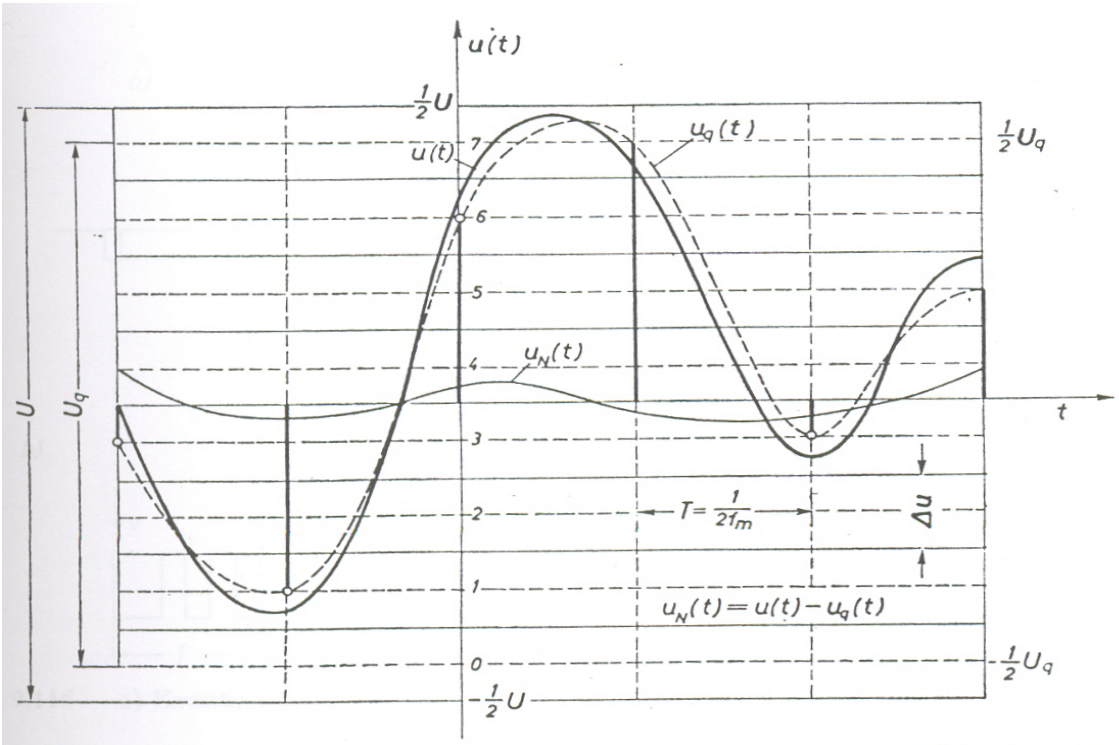


Δu je **korak kvantizacije.**

Greška kvantizacije

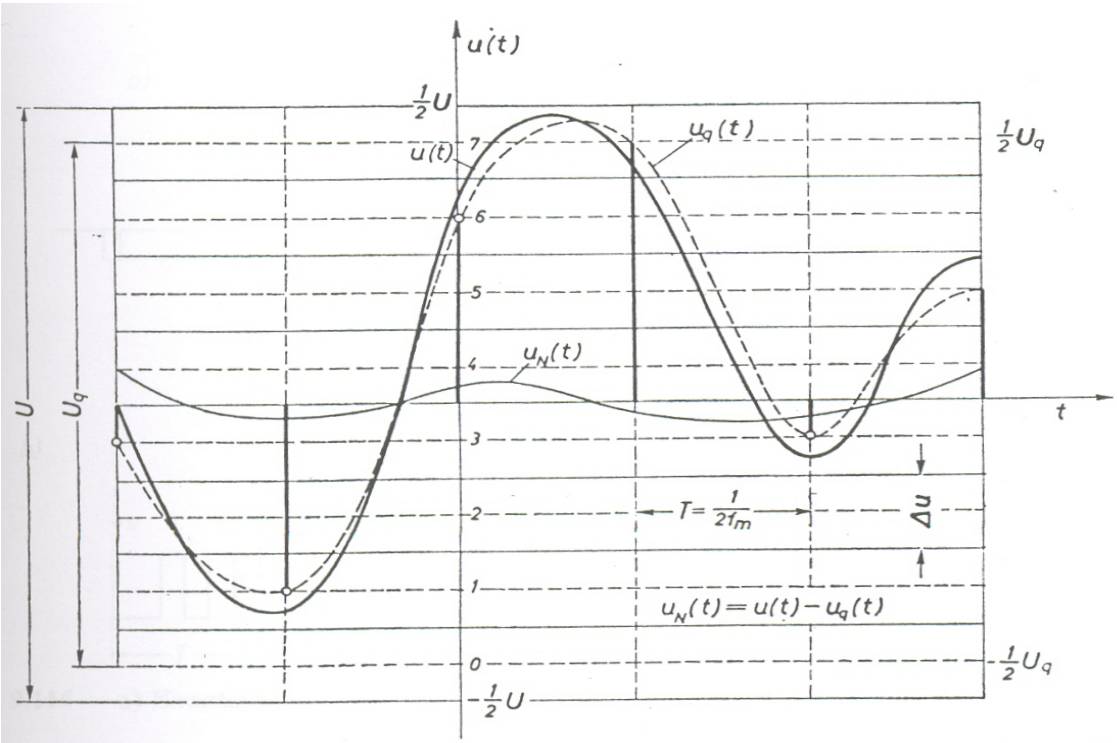
Moguće vrijednosti odbiraka su:

$$\pm\frac{1}{2}\Delta u, \pm\frac{3}{2}\Delta u, \pm\frac{5}{2}\Delta u, \ldots \pm\frac{q-1}{2}\Delta u,$$



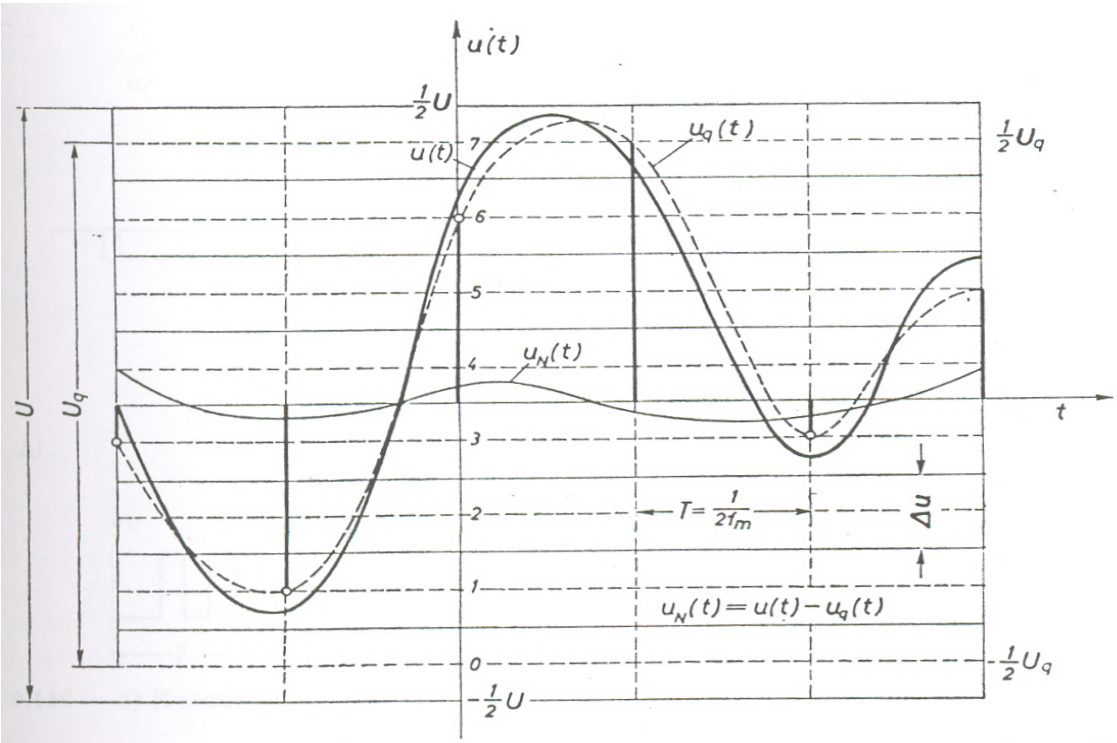
Greška kvantizacije

Ako se vrijednost nekog odbirka signala u(*t*), nađe između dvije punom linijom izvučene horizontalne linije, uzeće se umjesto njene stvarne vrijednosti, vrijednost koju definiše crticama izvučena horizontalna linija koja prolazi sredinom tog intervala.



Greška kvantizacije

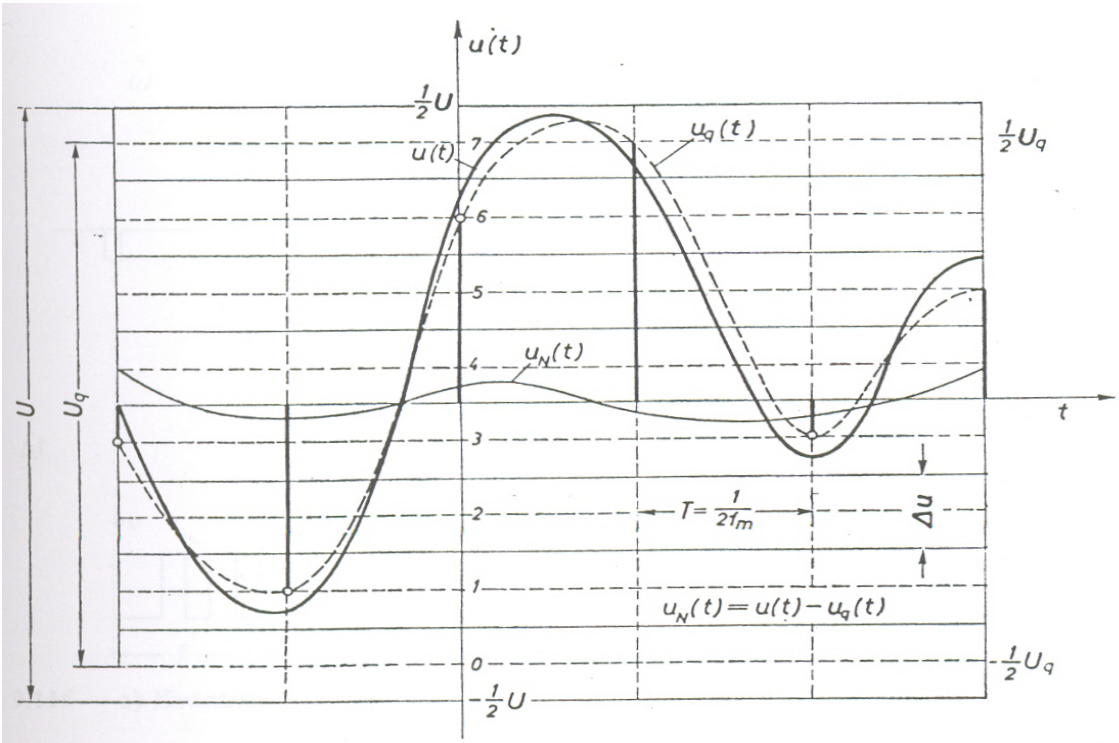
U principu, mogli bi se prenositi ovako dobijen kvantizirani odbirci. Na prijemu, njihovi propuštanjem kroz filtar propusnik niskih učestanosti, dobio bi se signal $u_q(t)$. On je na slici predstavljen isprekidanom linijom. Ovaj signal se razlikuje od signala $u(t)$.



Greška kvantizacije

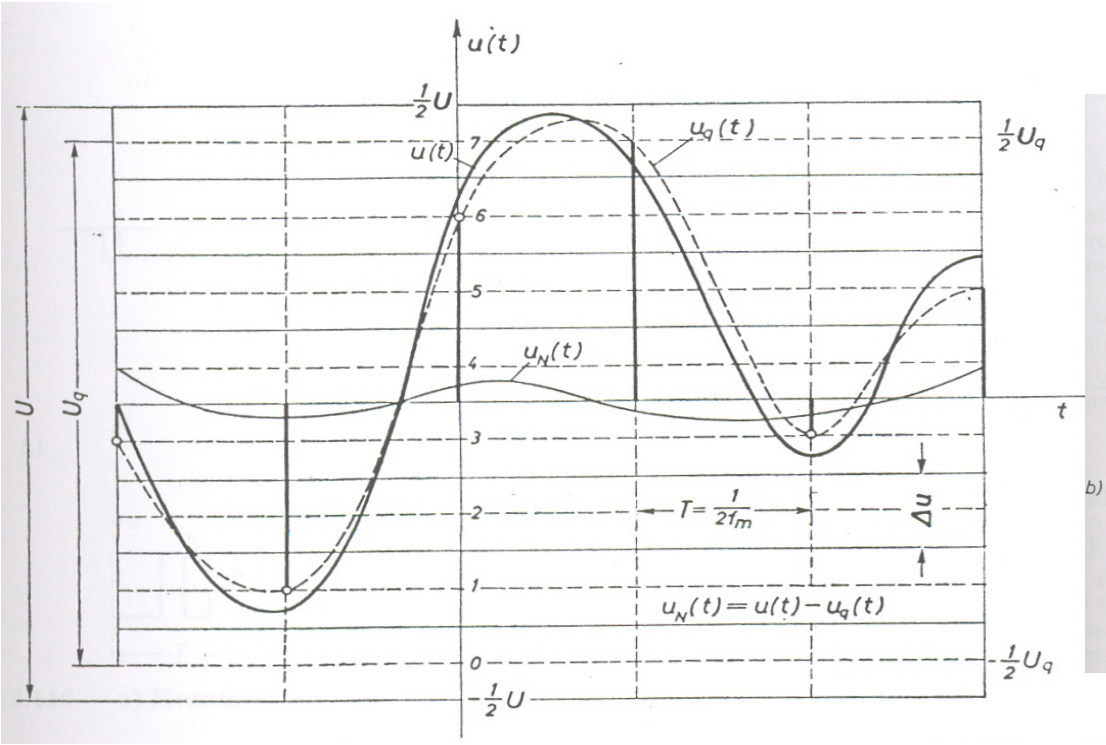
Razlika originalnog i kvantiziranog signala se naziva **greškom kvantizacije ili izobličenjem kvantizacije.**

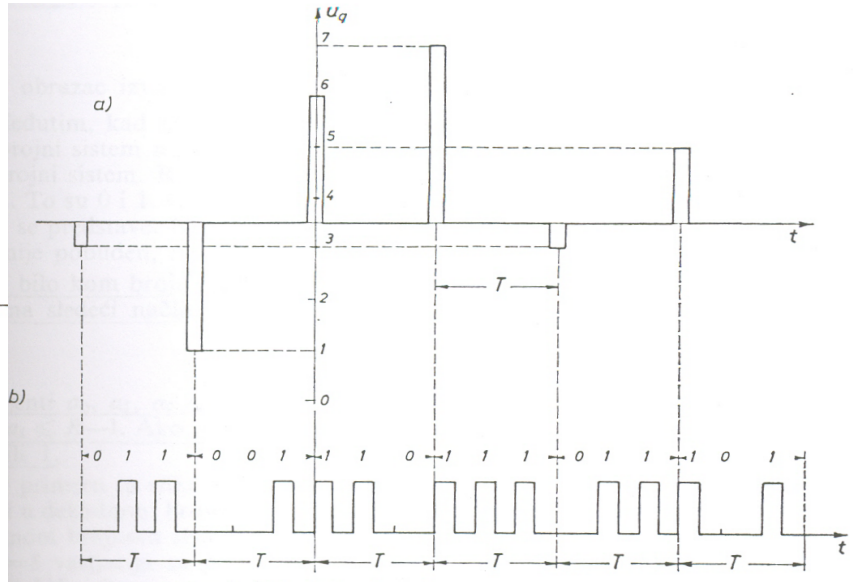
$$u_N(t) = u(t) - u_q(t)$$



Greška kvantizacije

Sa slike se uočava da vrijednost svakog od odbiraka ima jednu određenu vrijednost iz skupa mogućih vrijednosti. Pošto je taj skup konačan, znači da se te moguće vrijednosti mogu numerisati. Kako u razmatranom primjeru ima 8 vrijednosti, početna vrijednost se može obilježiti obilježiti sa 0, druga sa 1, i tako redom do 7.





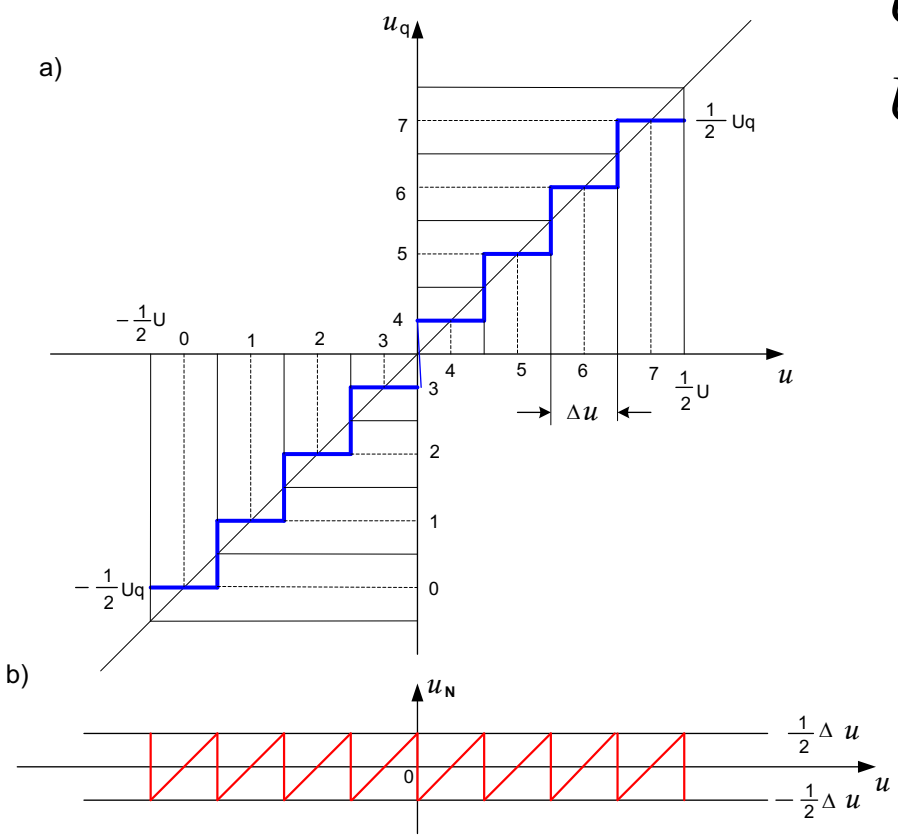
Greška ravnomjerne kvantizacije

Za procjenu greške kvantizacije koristi se snaga šuma kvantizacije koja predstavlja srednju kvadratnu vrijednost greške kvantizacije.

Karakteristika ravnomjerne kvantizacije je stepenasta funkcija, pri čemu su na apcisi nanesene vrijednosti odbiraka u, signala u(*t*), a na ordinati vrijednosti kvantiziranih odbiraka u_q. Ako se sa *q* označi broj kvantizacionih nivoa, onda:

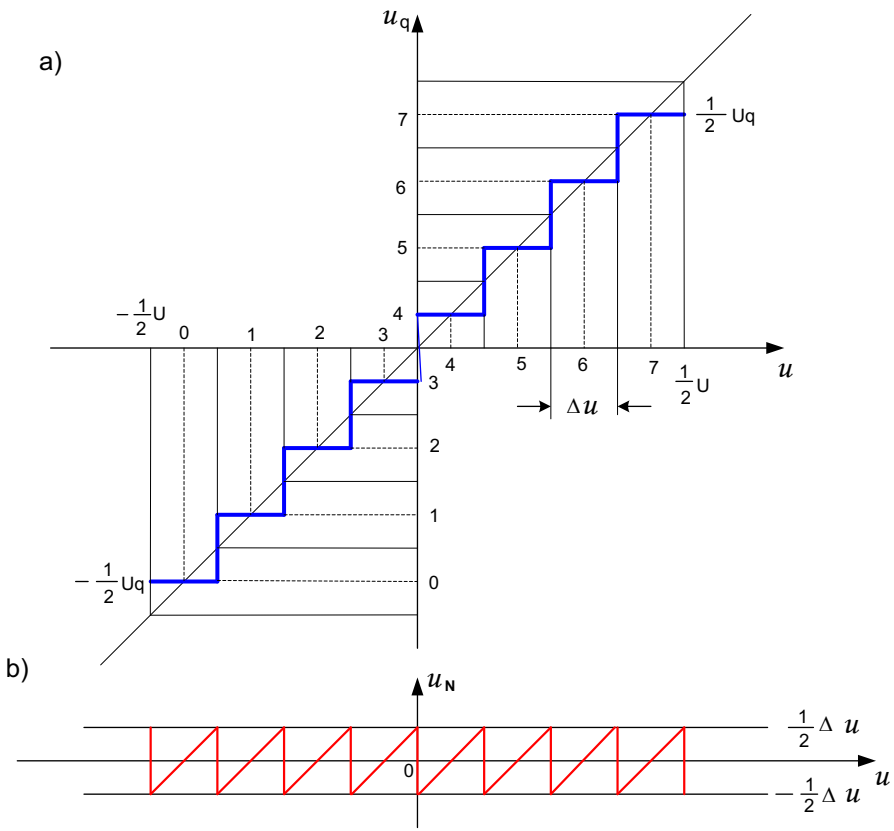
$$U = q\Delta u$$

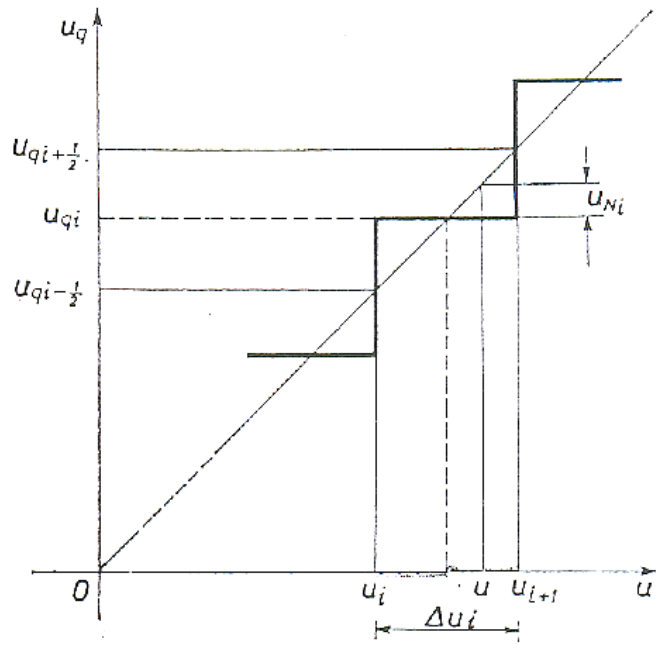
$$U_q = (q-1)\Delta u$$



Greška ravnomjerne kvantizacije

Na slici je prikazana je karakteristika greške kvantizacije u_N u zavisnosti od vrijednosti odbiraka signala $u(t)$. Uočava se da će greška biti utoliko manja ukoliko je korak kvantizacije Δu manji. Takođe, svaki odbirak amplitude u iz kvantizacionog intervala (u_i, u_{i+1}), poslije kvantizacije ima ampltudu u_{qi}





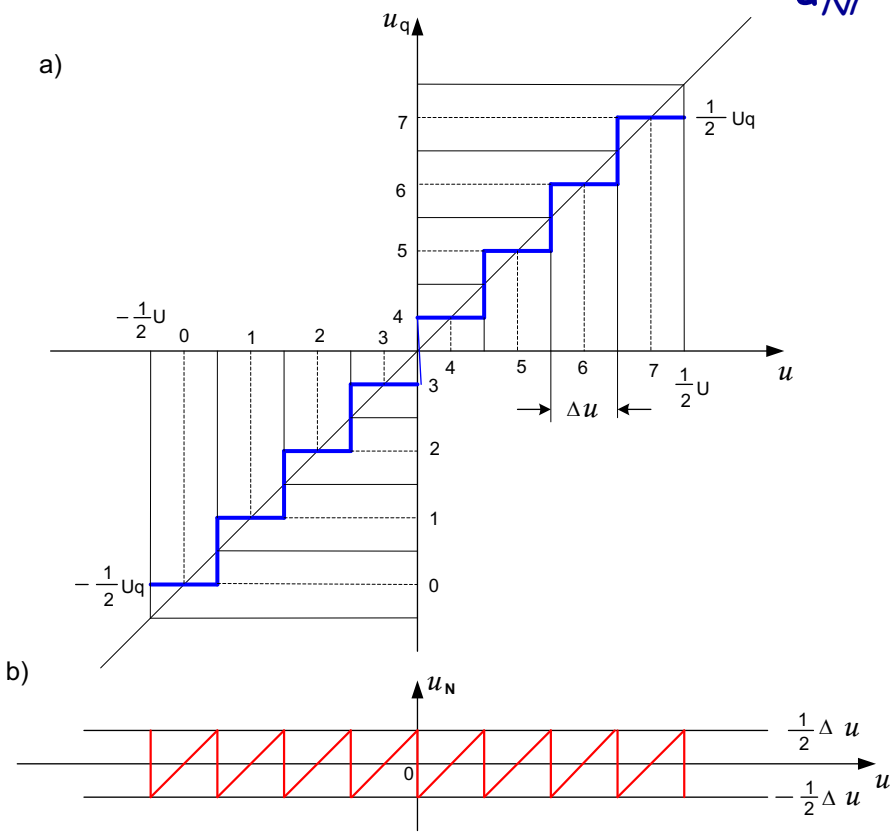
Greška ravnomjerne kvantizacije

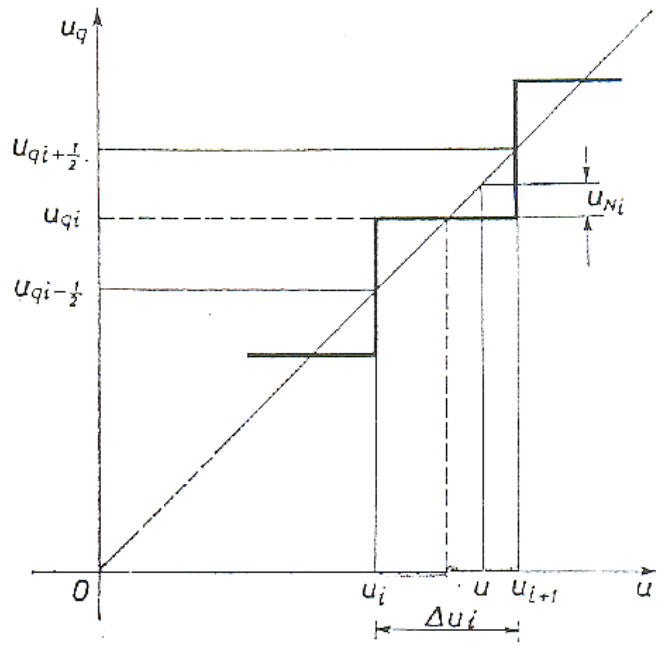
Neka je vrijednost u odbirka signala u(*t*) takva da se nalazi u intervalu

$$u_i \leq u \leq u_{i+1}$$

Vrijednosti svih odbiraka koje se nađu u ovom intervalu, poslije kvantizacije iznosiće u_{qi}. Prema tome, greška koja se čini u ovom intervalu, biće:

$$u_{Ni} = u - u_{qi}$$

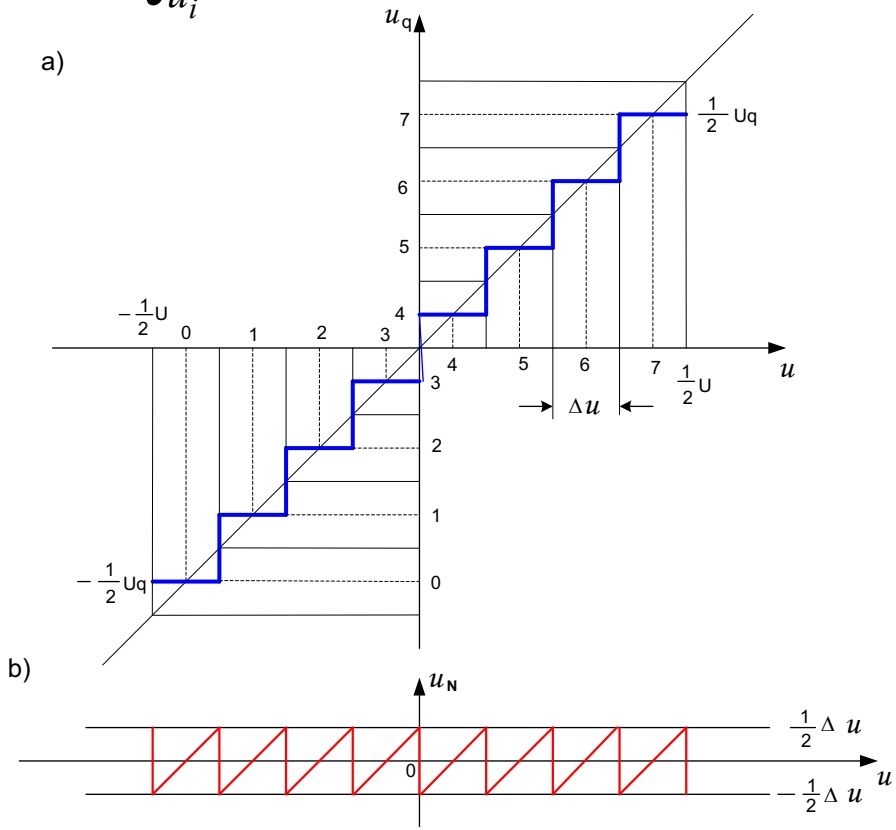


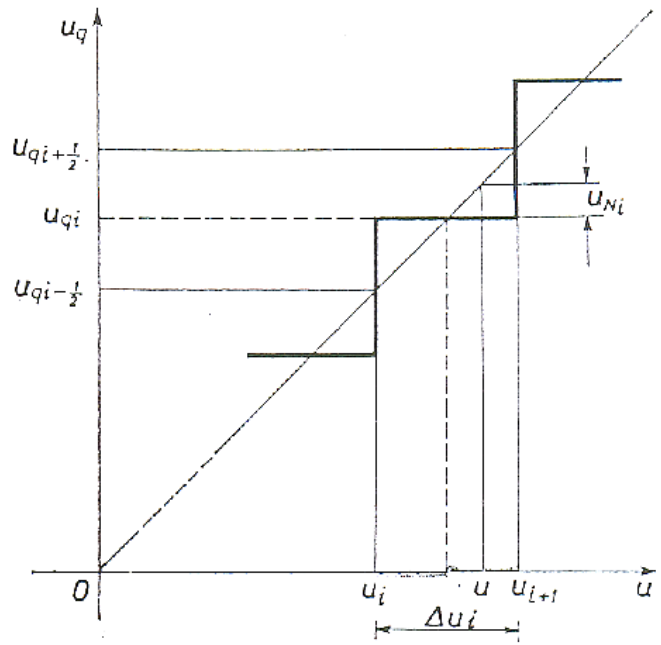


Greška ravnomjerne kvantizacije

Neka je *p(u)du* vjerovatnoća da se amplituda odbirka signala u(*t*) koji se kvantizira nalazi u intervalu od *u* do *u + Δu*. Sa *p(u)* je označena funkcija gustine vjerovatnoće odbiraka signala u(*t*). Prema tome, srednja kvadratna vrijednost greške u posmatranom intervalu (u_i , u_{i+1}) biće:

$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(u - u_{qi}\right)^2 p(u)du \quad \text{gdje je:} \quad u_{qi} = \frac{1}{2}\left(u_i + u_{i+1}\right)$$



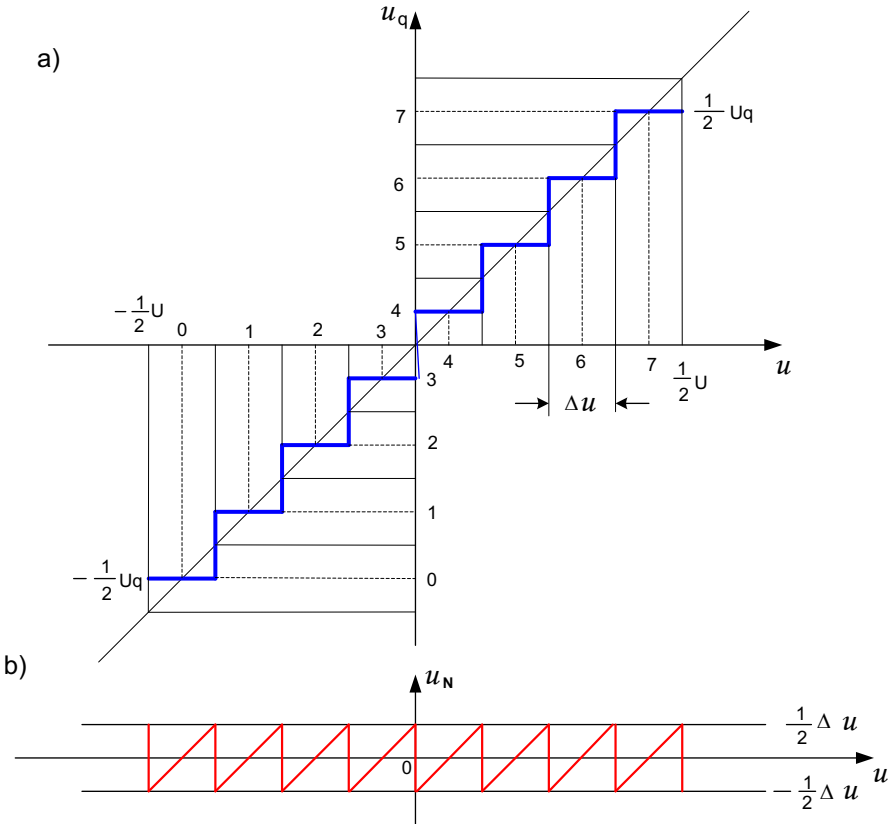


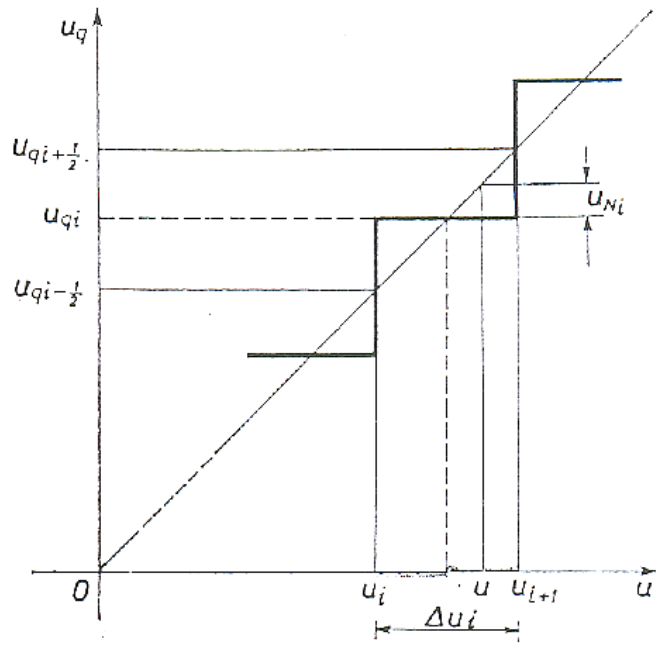
Greška ravnomjerne kvantizacije

Drugim riječima, u_{qi} dijeli interval $u_{i+1} - u_i = \Delta u_i$ na dva jednaka dijela, pa je:

$$u_i = u_{qi} - \frac{1}{2}\Delta u_i$$

$$u_{i+1} = u_{qi} + \frac{1}{2}\Delta u_i$$



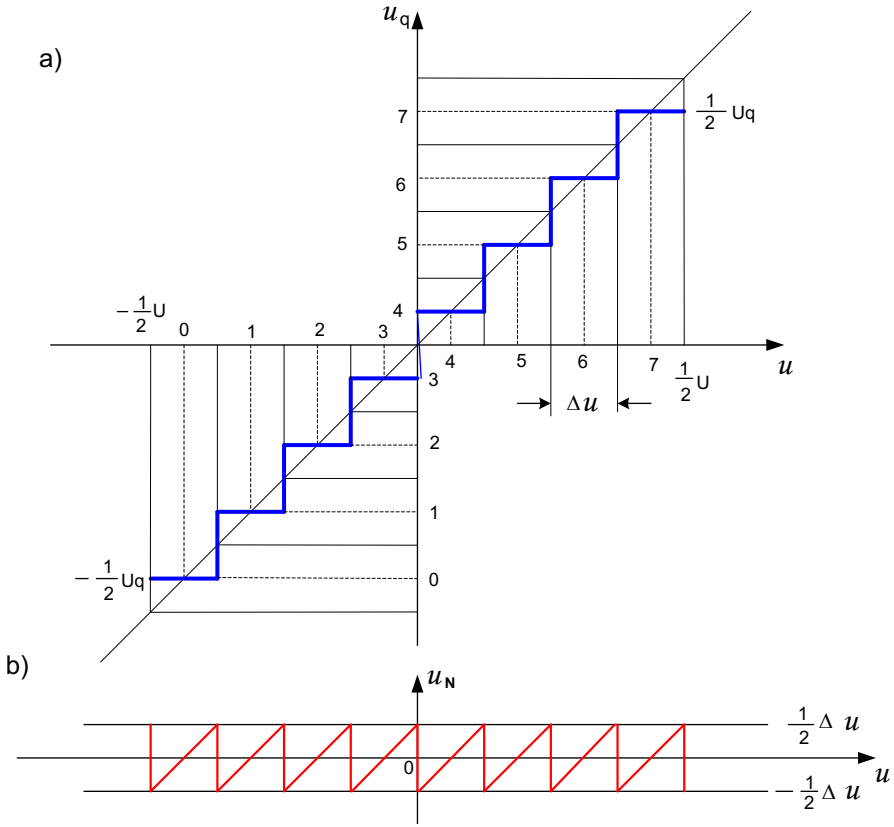


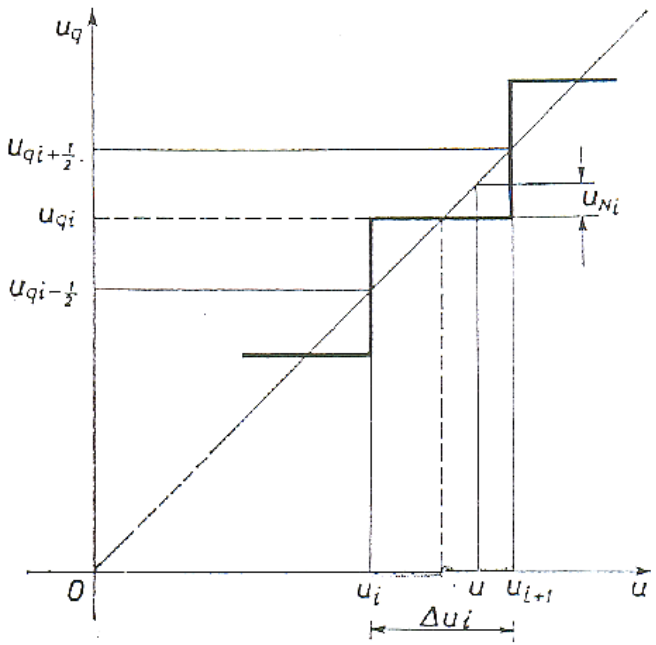
Greška ravnomjerne kvantizacije

Neka je interval Δu_i, odnosno korak kvantizacije, mali tako da se može smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(u) = p\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right) = p(u_{qi})$$

za $u_i \leq u \leq u_{i+1}$

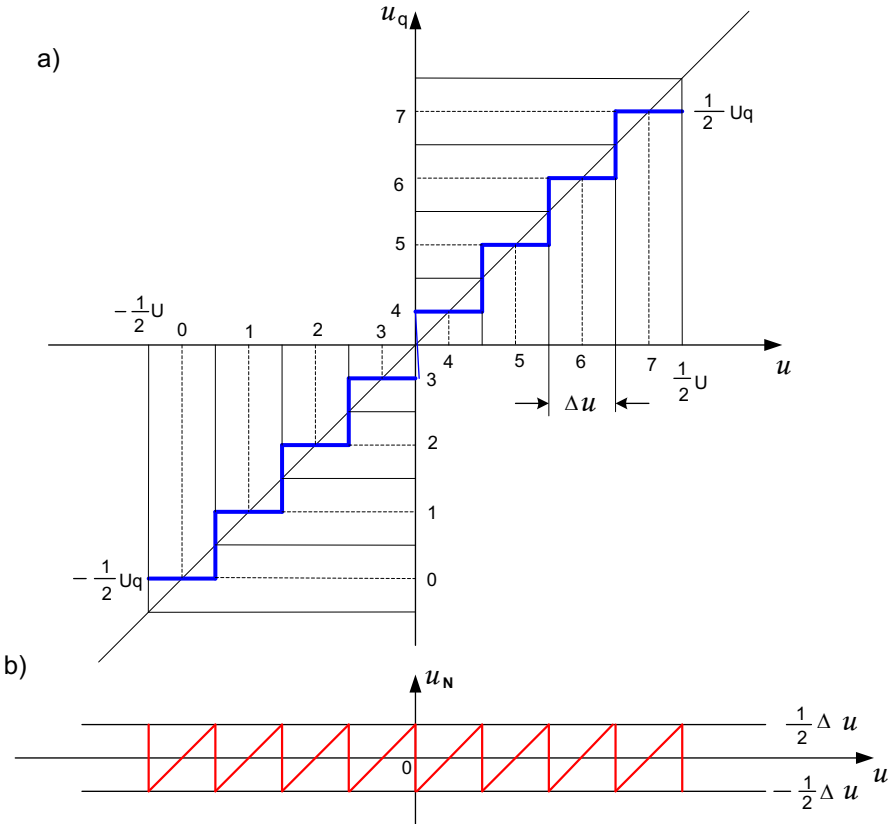


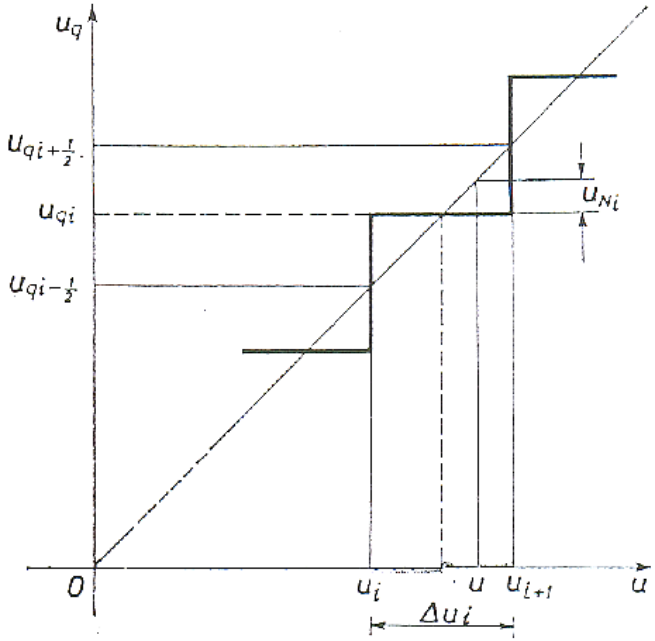


Greška ravnomjerne kvantizacije

Ovo omogućava da se *p(u)* izvuče ispred znaka integrala, pa se dobija:

$$\overline{u_{Ni}^2} = p(u_{qi}) \int_{u_{qi}-\frac{1}{2}\Delta u_i}^{u_{qi}+\frac{1}{2}\Delta u_i} (u-u_{qi})^2 du = \frac{1}{12} p(u_{qi})(\Delta u_i)^3$$

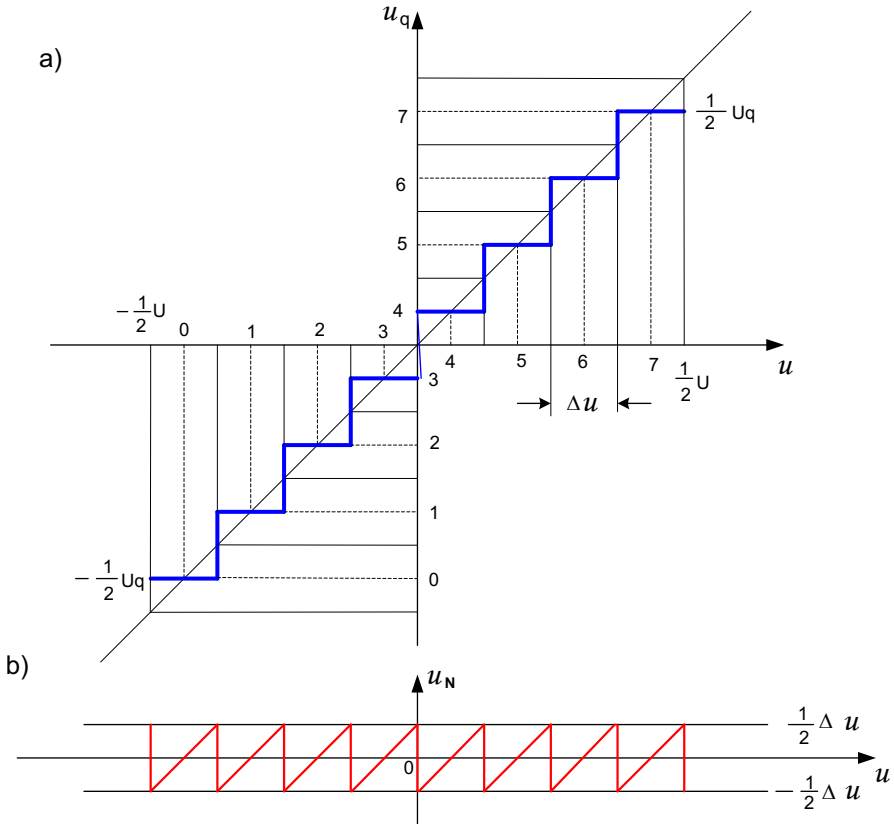


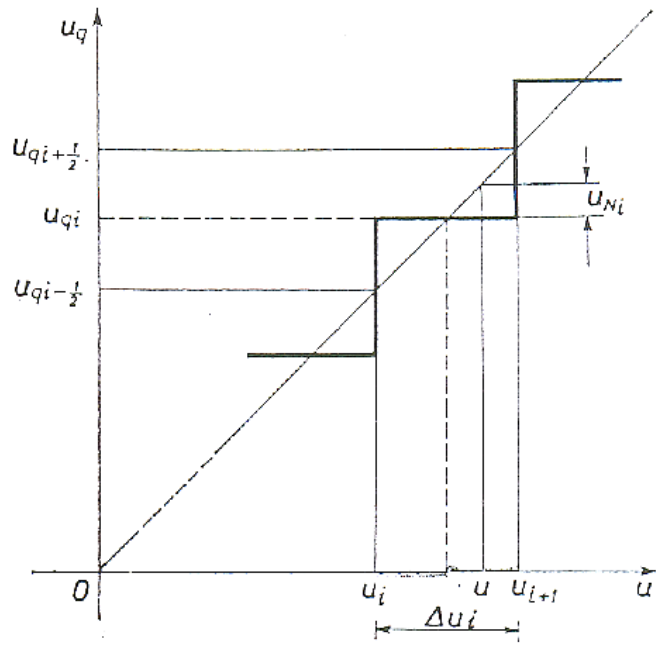


Greška ravnomjerne kvantizacije

Ukupna srednja kvadratna vrijednost greške $\overline{u_N^2}$ biće jednaka sumi vrijednosti iz svih intervala. Vrijednosti $\overline{u_{Ni}^2}$ ima koliko ima i koraka kvantizacije.

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1} \overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{q-1} p(u_{qi})(\Delta u_i)^3$$

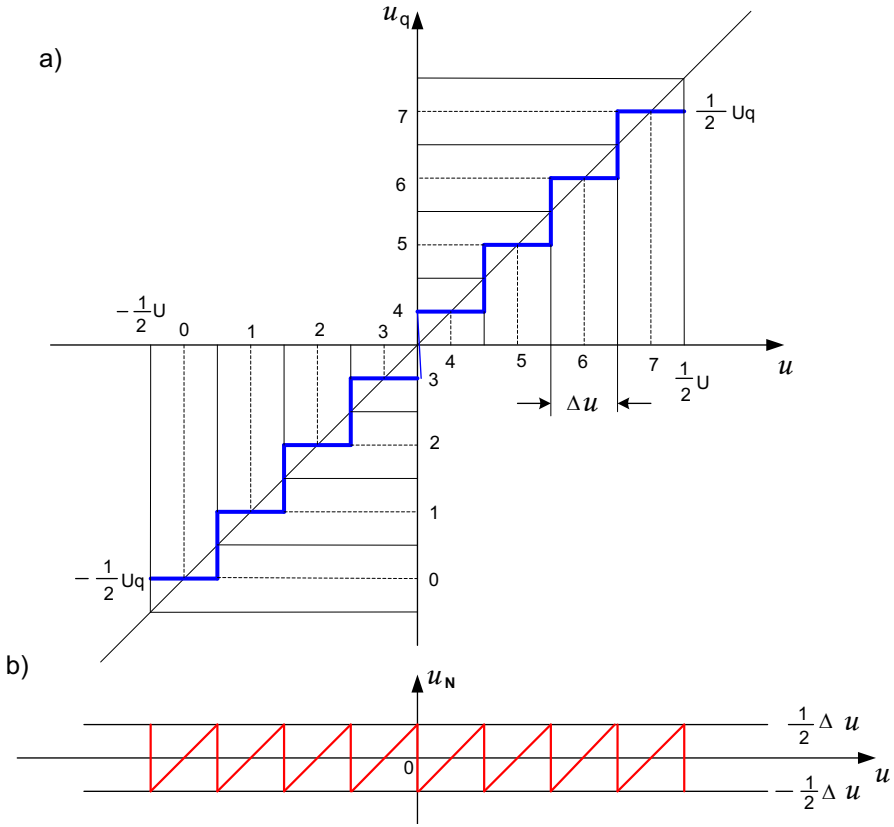


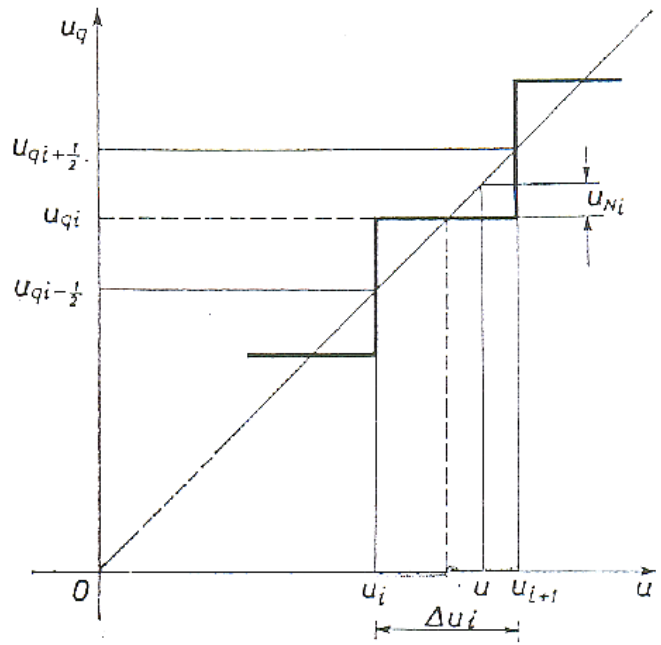


Greška ravnomjerne kvantizacije

Dakle, u slučaju ravnomjerne kvantizacije, srednja kvadratna vrijednost greške zavisi samo od koraka kvantizacije Δu. Ovakva greška ne može da se izbjegne. Ona se manifestuje kao šum i njena srednja kvadratna vrijednost se naziva **snagom šuma kvantizacije**.

$$P_{Nq} = \overline{u_N^2} = \frac{1}{12}(\Delta u)^2$$



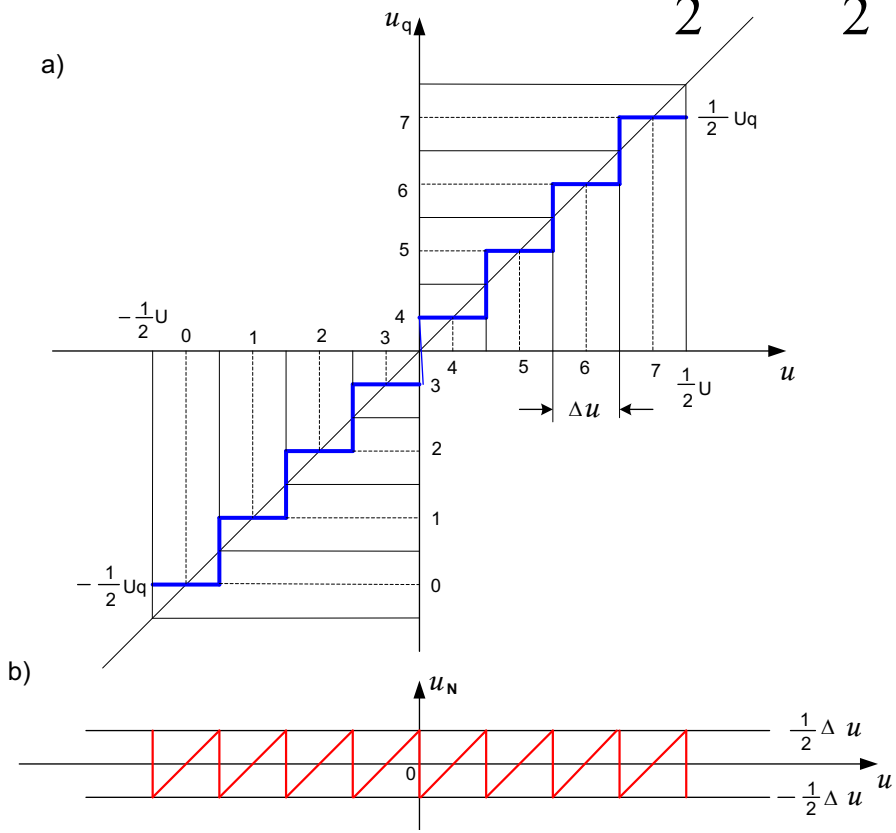


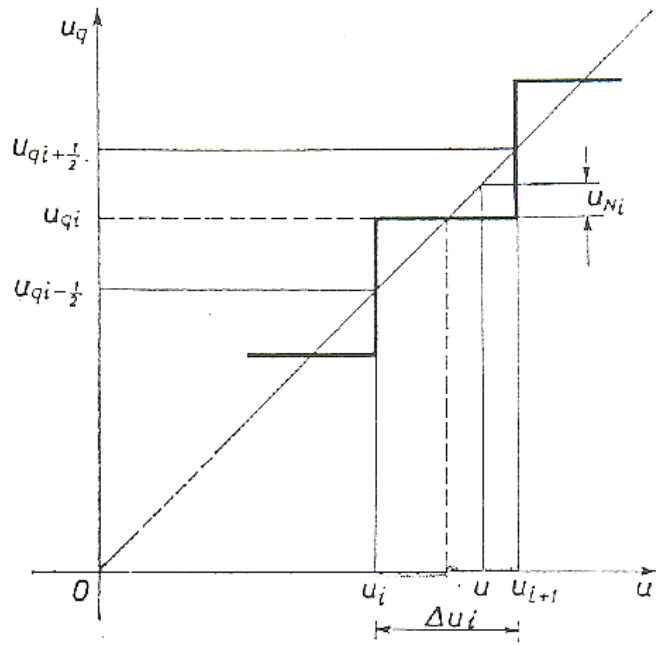
Greška ravnomjerne kvantizacije

Pretpostaviti da je u(t) signal čiji su odbirci takvi da se amplituda bilo kojeg od njih nalazi u intervalu $-\frac{1}{2}U \le u \le \frac{1}{2}U.$

Neka je $u_q(t)$ kvantizirani signal čiji odbirci u_q mogu imati vrijednosti:

$$\pm\frac{1}{2}\Delta u, \pm\frac{3}{2}\Delta u, \pm\frac{5}{2}\Delta u, \ldots \pm\frac{q-1}{2}\Delta u$$



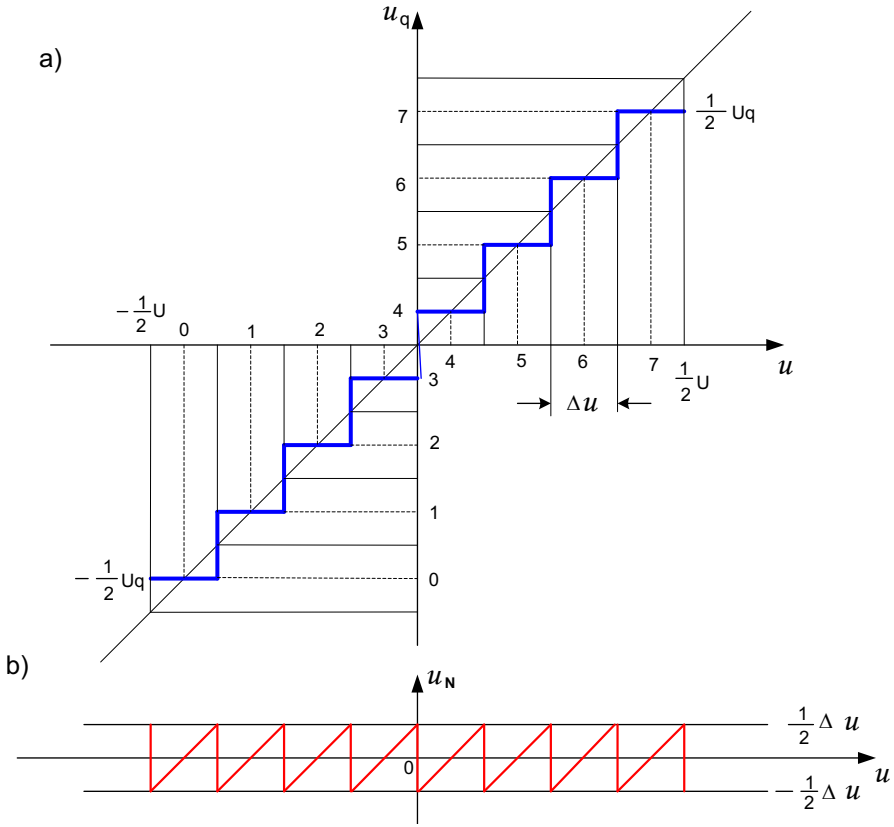


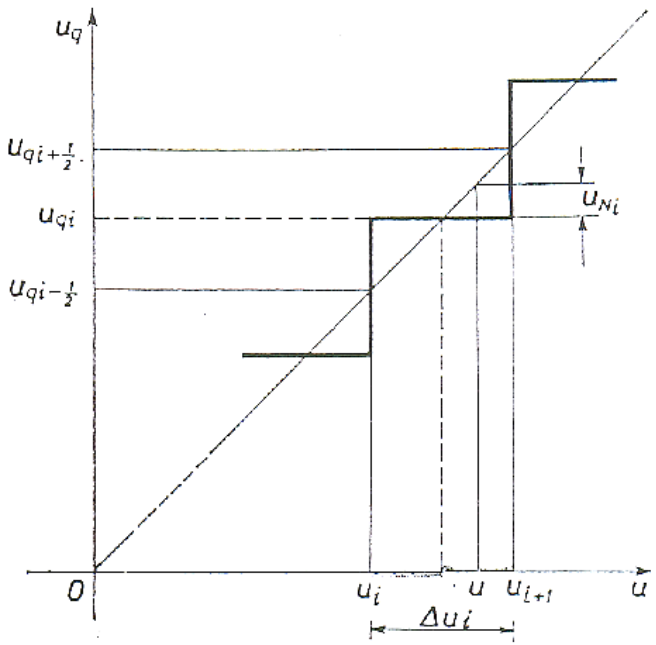
Greška ravnomjerne kvantizacije

Kako je:

$$p_0 U = p_0\left[\frac{1}{2}U - \left(-\frac{1}{2}\right)U\right] = 1$$

izraz za srednju snagu signala P_s glasi: $$P_s = \frac{1}{12}U^2 = \frac{1}{12}q^2(\Delta u)^2$$

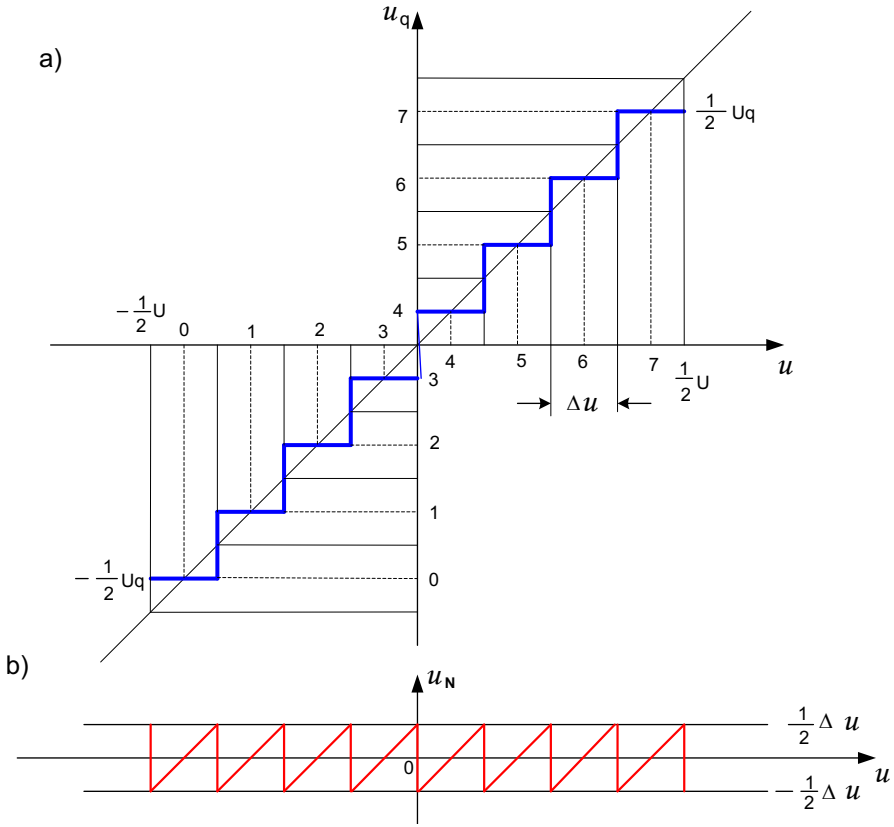


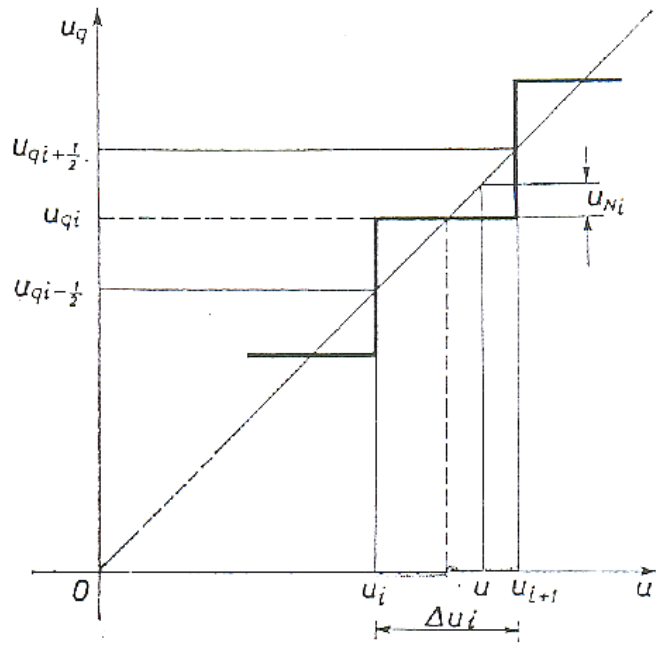


Greška ravnomjerne kvantizacije

Srednja snaga P_q kvantiziranog signala $u_q(t)$. Ona je jednaka srednjoj kvadratnoj vrijednosti amplituda kvantiziranih odbiraka. S obzirom da su sve amplitude odbiraka jednako vjerovatne važi:

$$P_q = \frac{1}{q} 2 \frac{(\Delta u)^2}{4} \left[1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (q-1)^2 \right] = \frac{q^2 - 1}{12} (\Delta u)^2$$

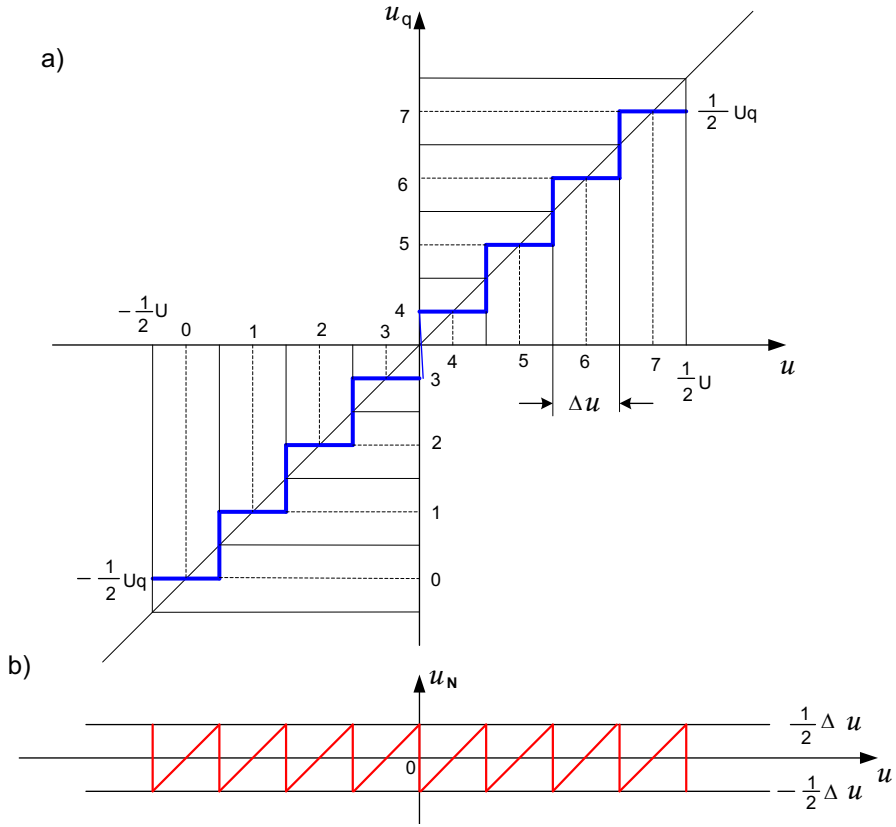


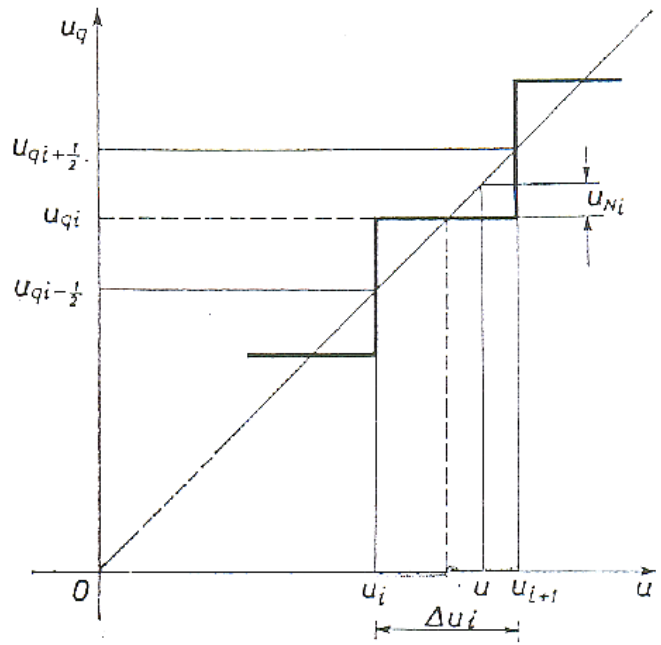


Greška ravnomjerne kvantizacije

Upoređujući dva poslednja izraza dobija se:

$$P_s - P_q = \frac{1}{12} q^2 (\Delta u)^2 - \frac{q^2 - 1}{12} (\Delta u)^2 = \frac{1}{12} (\Delta u)^2 = P_{Nq}$$



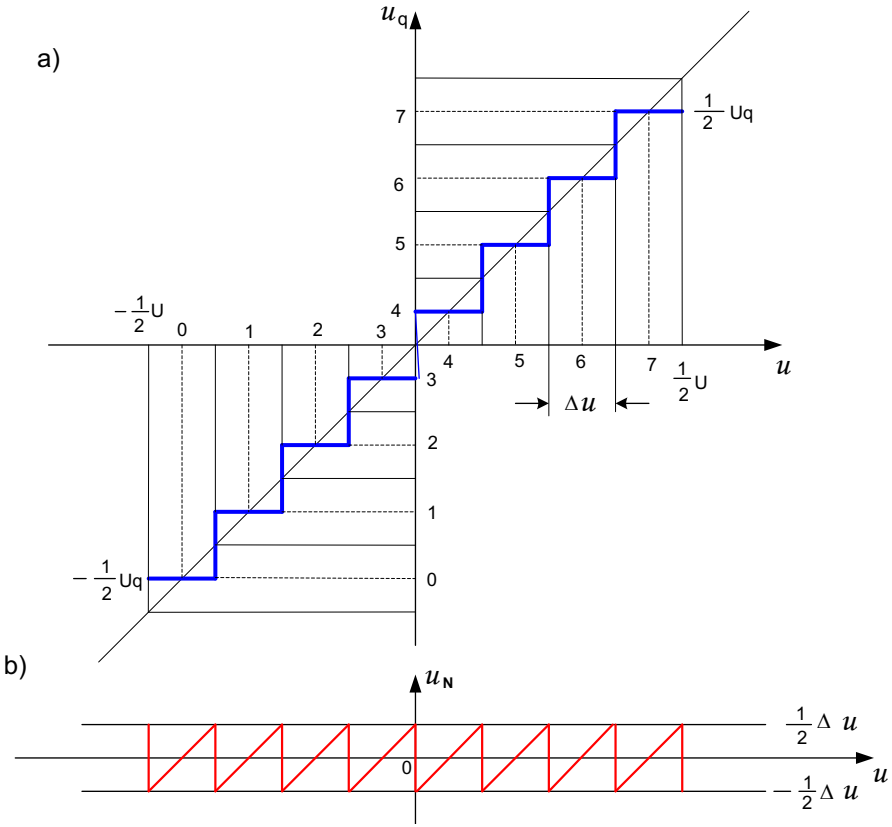


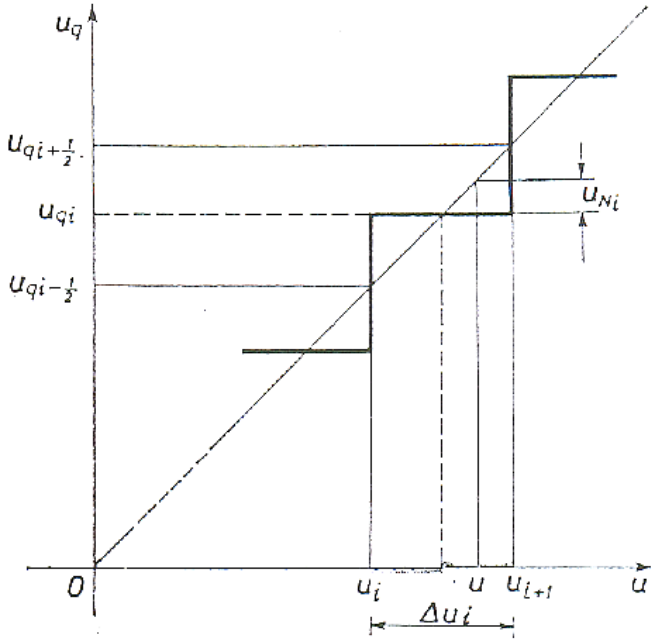
Greška ravnomjerne kvantizacije

Traženi odnos srednje snage kvantiziranog signala i šuma kvantizacije koji postoji na izlazu iz predajnika biće jednak:

$$A_{Nq} = \frac{P_q}{P_{Nq}} = q^2 - 1$$

Pošto je uvijek $q^2 \gg 1$, to se može napisati: $A_{Nq} \cong q^2$

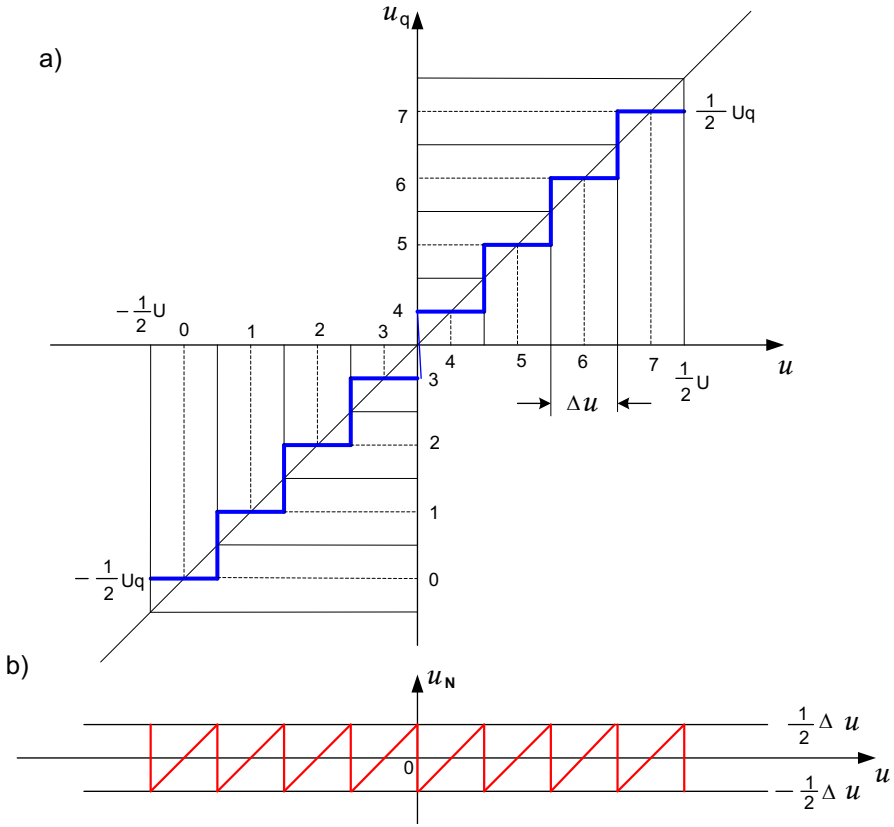


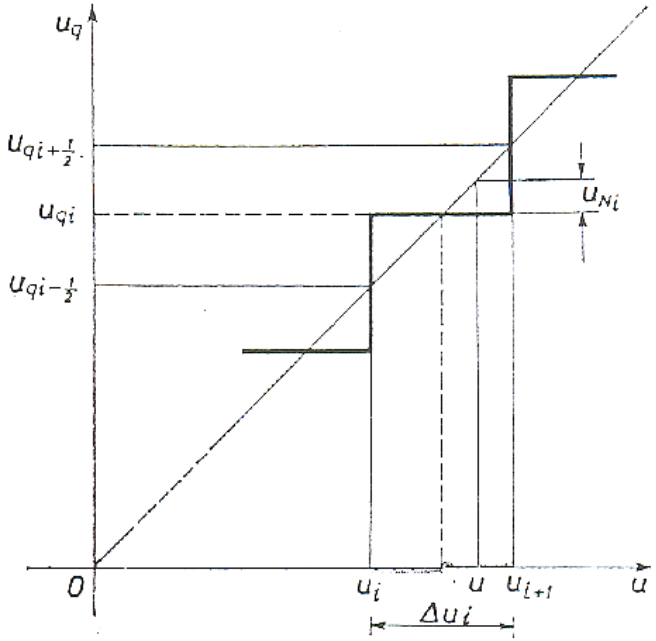


Greška ravnomjerne kvantizacije

Iz ovog izraza se vidi da što je *q* veće, to je i veći odnos/signal šum kvantizacije. Obično se ovaj odnos izražava u decibelima:

$$a_{Nq} = 10\log A_{Nq} = 10\log\left(q^2 - 1\right) \cong 20\log q$$



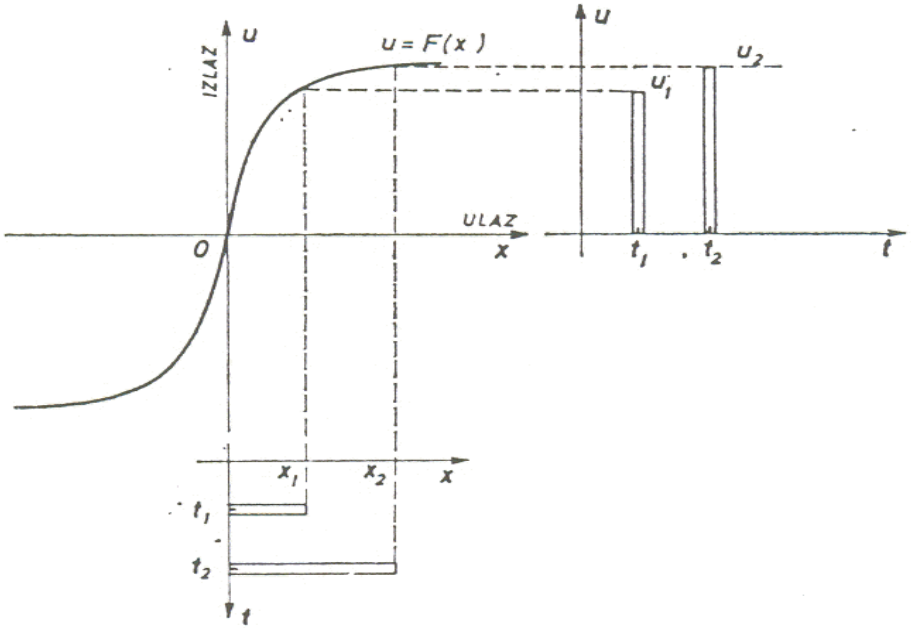


Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

- Pokazano je da je srednja snaga šuma ravnomjerne kvantizacije zavisi samo od koraka kvantizacije Δu, a ne od vrijednosti signala.
- Ako bi se za jedan dati signal koristila ravnomjerna kvantizacija, jasno je da bi odnos signal/šum kvantizacije bio veliki za veće vrijednosti, a mali za male.
- Ako u statistici signala preovladavaju signali malih vrijednosti, ravnomjerna kvantizacija ne predstavlja optimalno rješenje.
- Zadržavajući isti broj koraka kvantizacije *q*, bolje je uzeti male korake za signale malih vrijednosti, a veće za signale većih vrijednosti, jer će na taj način, odnos signal/šum kvantizacije biti znatno poboljšan za male signale, a neznatno pogoršan za velike.

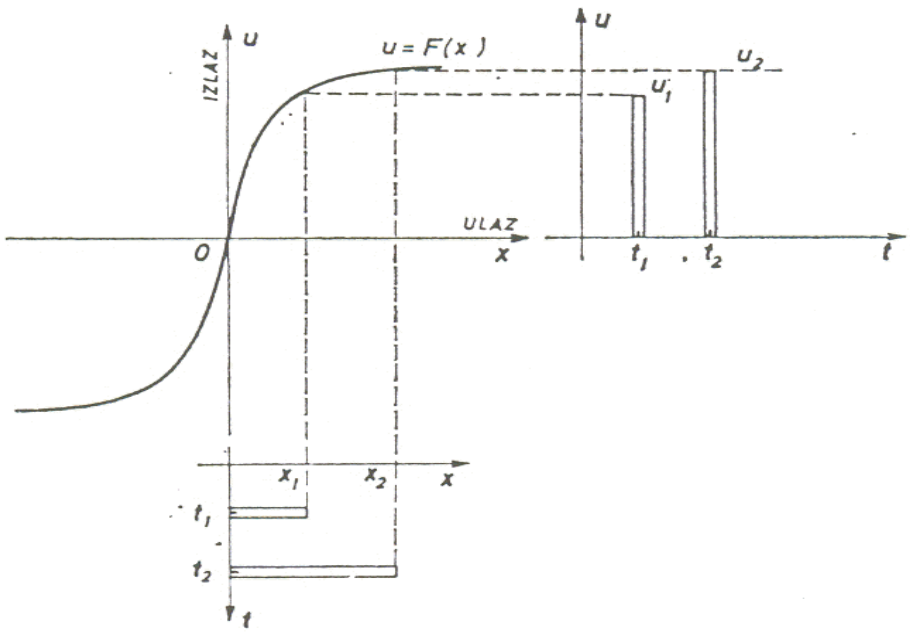
Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

- U principu je moguće da se napravi sklop koji bi direktno obavljao neravnomjernu kvantizaciju odbiraka primarnog signala, pri čemu bi zakon promjene širine koraka kvantizacije bio diktiran određenom statistikom signala. Međutim, postoji i jedno bolje i jednostavnije rješenje.
- Najprije se odbirci primarnog signala propuste kroz jedan nelinearan sklop koji se naziva **kompresorom.** Njegova karakteristika "izlaz - ulaz" prikazana je na slici funkcijom *u=F(x).*



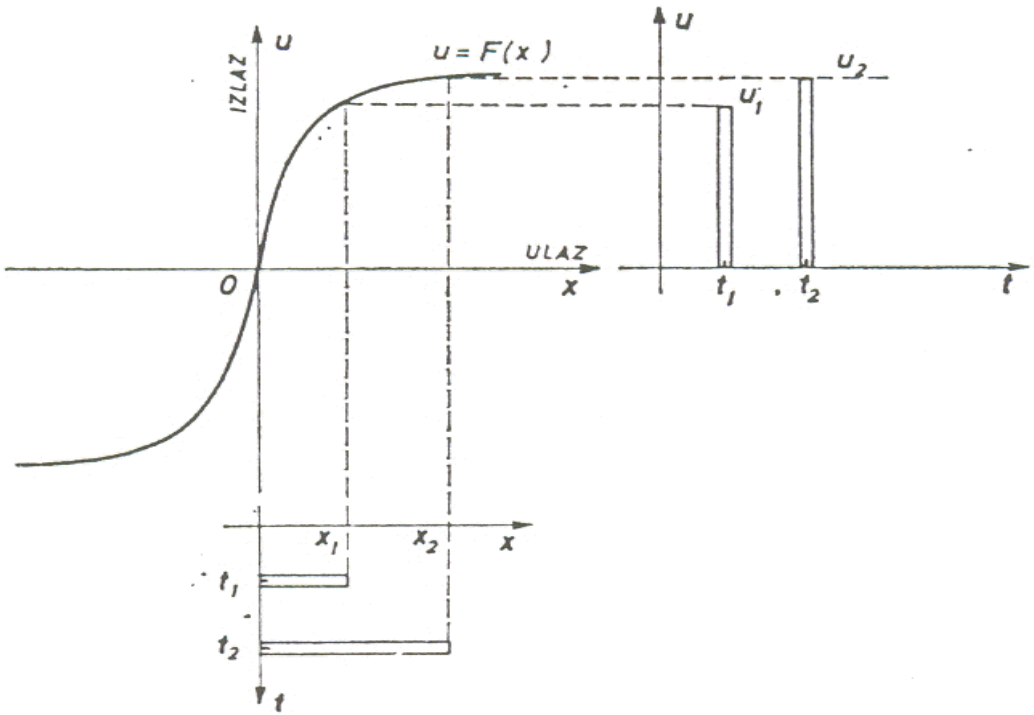
Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

- *x* predstavlja vrijednost odbiraka signala, na ulazu u kompresor,
- *u* je vrijednost odbiraka na njegovom izlazu.
- Kompresor odbirke malog intenziteta znatno više pojačava od obiraka velikog intenziteta. Na taj način, dijapazon između malih i velikih amplituda koji postoji na ulazu u kompresor, na izlazu biva komprimovan. Ovakav sklop mora da dejstvuje trenutno, pa se stoga naziva trenutnim kompresorom, za razliku od nekih drugih koji to nijesu.



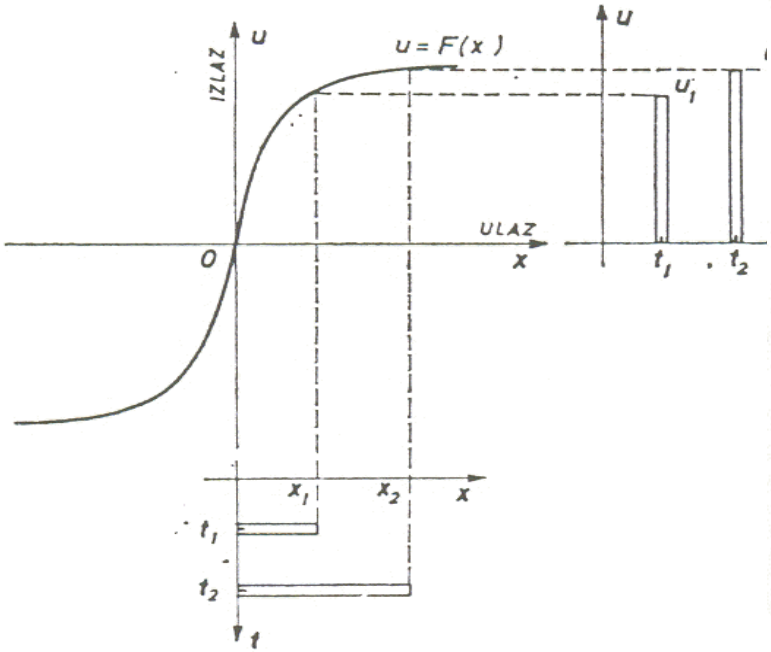
Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

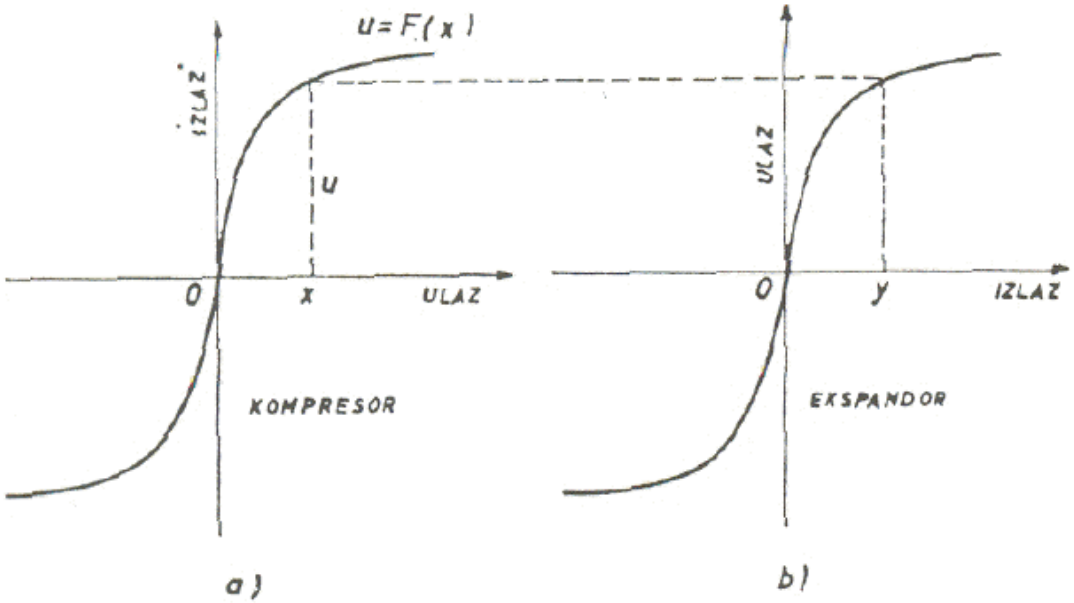
Ako se sada, na odbirke koji su dobijeni na izlazu iz kompresora, primijeni postupak ravnomjerne kvantizacije, jasno je da će se postići onaj osnovni cilj: odbirci malog intenziteta biće "finije" kvantizirani od onih velikog intenziteta. Naravno, karakteristika kompresora *u=F(x)* zavisi od <u>statistike signala</u>.



Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

Na prijemnoj strani potrebno je obaviti operaciju inverznu kompresiji, da bi se dobili originalni odbirci. To se obavlja sklopom koji se naziva trenutnim **ekspandorom**. Ako je karakteristika "izlaz - ulaz" onakva kakva je prikazana na prvoj slici, onda ekspandor mora da ima istu takvu karakteristiku, s tim što ona predstavlja zavisnost "ulaza od izlaza", a ne "izlaza od ulaza".

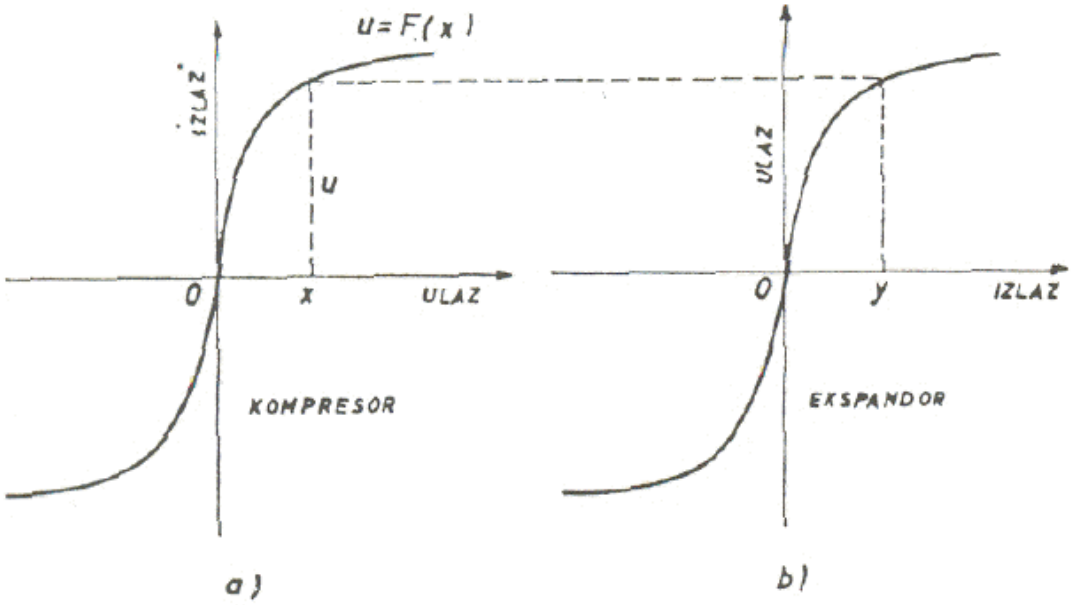




Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

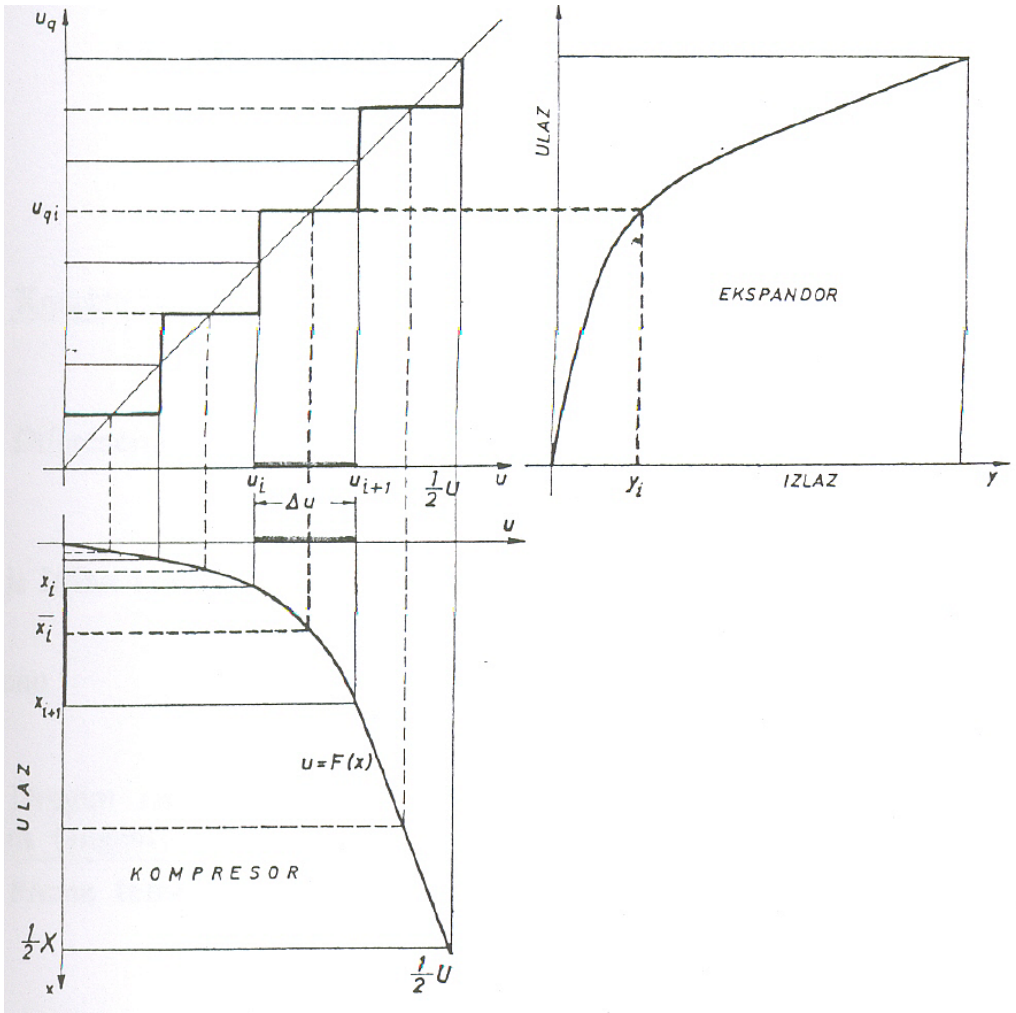
Sa slike se vidi da će odbirci velikog intenziteta biti znatno manje oslabljeni od onih malog intenziteta koji će pretrpjeti veće slabljenje.

Karakteristike kompresora i ekspandora moraju biti komplementarne u tom smislu da, ako se vežu u tandem kompresor - ekspandor, ulaznom signalu x u kompresor mora da odgovara izlazni signal y iz ekspandora takav da je $y = x$. To je uslov da ovaj tandem, poznat pod nazivom **kompandor**, ne unosi izobličenje.



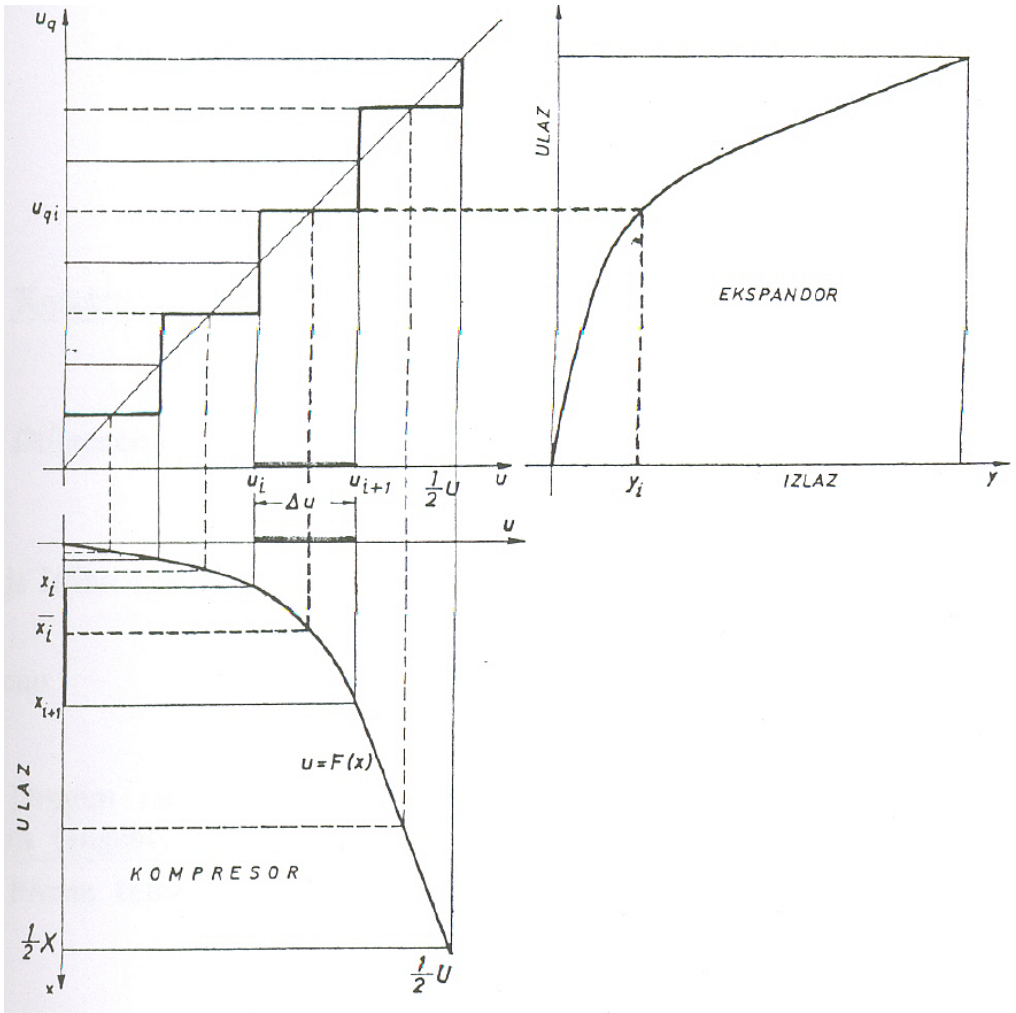
Neravnomjerna kvantizacija. Kompresija

U donjem dijelu slike nacrtana je karakteristika kompresora *u = F(x)*, gdje *x* predstavlja amplitude odbiraka ulaznog signala, a *u* amplitude odbiraka na izlazu iz kompresora. Karakteristika kvantizacije je predstavljena stepenastom krivom i svi koraci kvantizacije na njoj su međusobno jednaki.



Greška neravnomjerne kvantizacije

U i - tom intervalu kvantizacije vrijednosti odbiraka primarnog signala x su takve da je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, poslije kompresije postaju ravne u i nalaze se u intervalu $u_i \leq u \leq u_{i+1}$. Sve amplitude iz ovoga intervala poslije kvantizacije postaju jednake u_{qi}. Odbirak takve amplitude u_{qi} koji dođe na ulaz ekspandora, na njegovom izlazu ima amplitudu y_i. Dakle, svi odbirci čije su amplitude x, gdje je $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, reprodukovaće se na prijemu kao jedan te isti odbirak amplitude y_i.

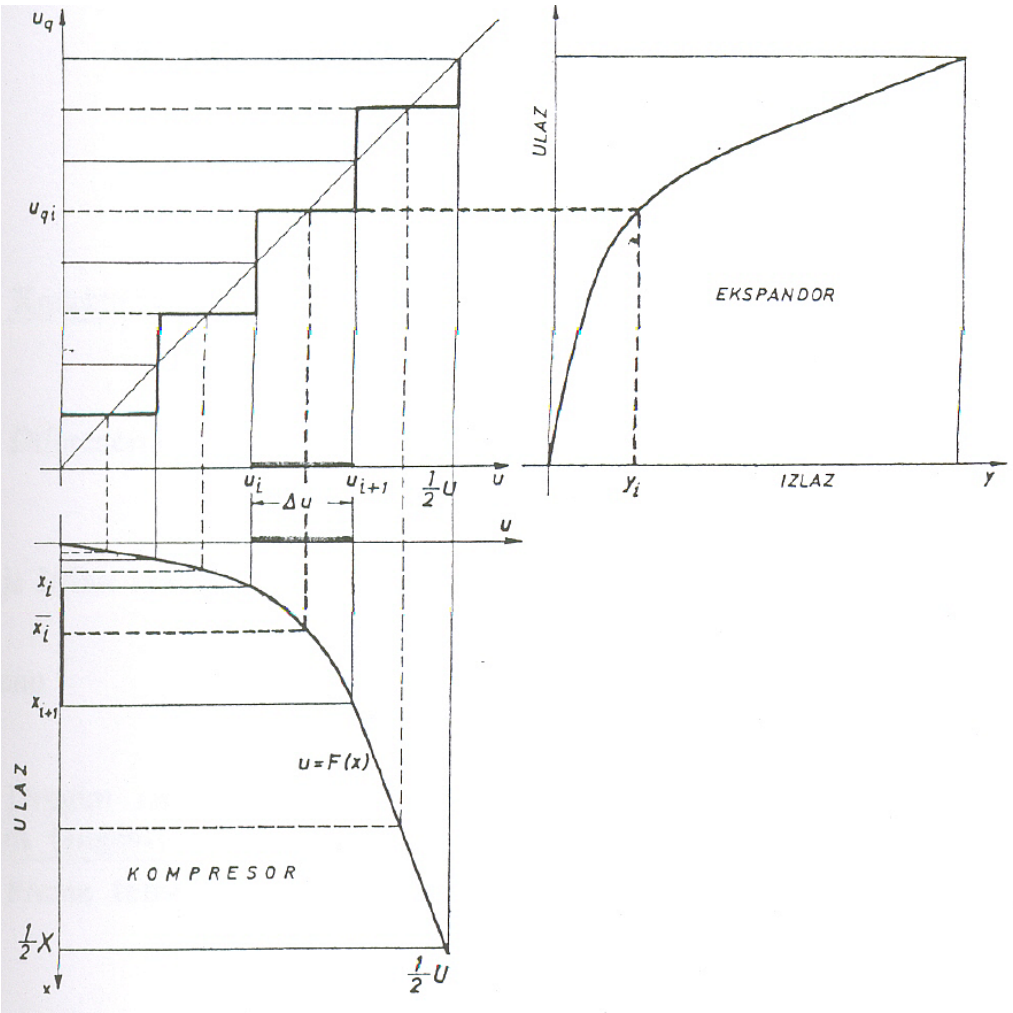


Greška neravnomjerne kvantizacije

Prema tome, srednja kvadratna greška u ovom intervalu biće:

$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x)\,dx$$

U ovom izrazu *p(x)* predstavlja funkciju gustine vjerovatnoće koja karakteriše raspodjelu amplituda odbiraka *x* primarnog signala *x(t)*.



Greška neravnomjerne kvantizacije

Neka je

$$y_i = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right) = \overline{x_i}$$

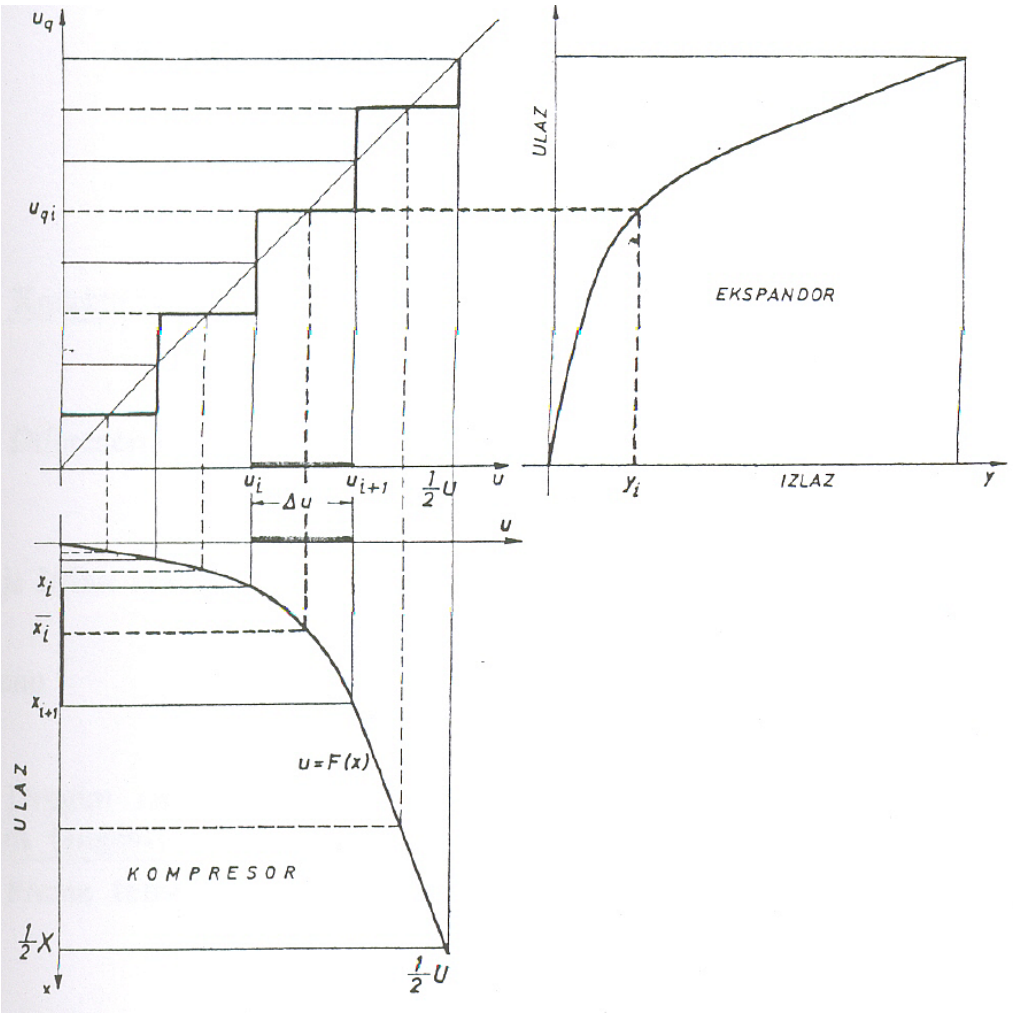
Ova pretpostavka biće utoliko ispravnija ukoliko je interval (x_{i+1}-x_i) manji. Neka je širina tog intervala Δx_i

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

Uz učinjenu pretpostavku važiće da je:

$$x_i = \overline{x_i} - \frac{1}{2}\Delta x_i$$

$$x_{i+1} = \overline{x_i} + \frac{1}{2}\Delta x_i$$

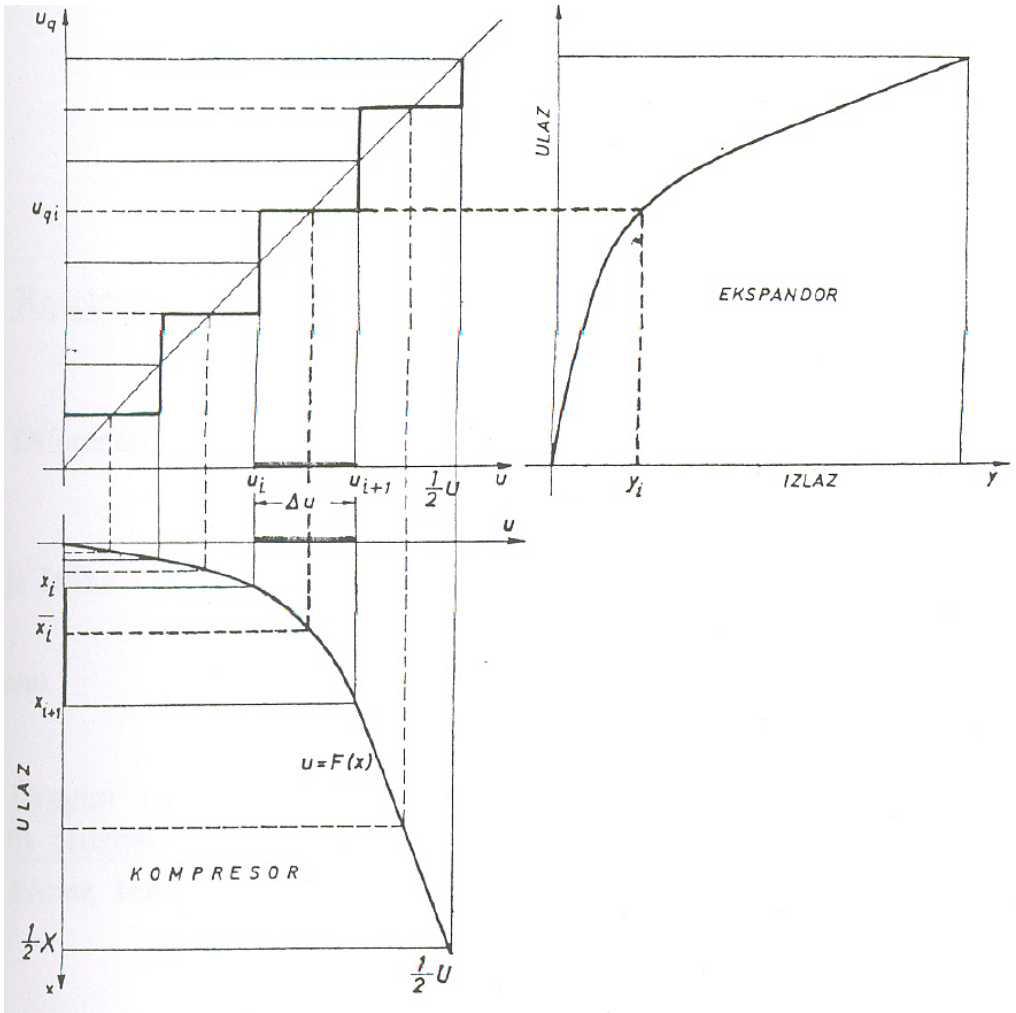


Greška neravnomjerne kvantizacije

Pošto je Δx_i malo, može se smatrati da se funkcija gustine vjerovatnoće u ovom intervalu ne mijenja i da iznosi:

$$p(x) = p(\overline{x_i})$$

za $x_i \leq x \leq x_{i+1}$



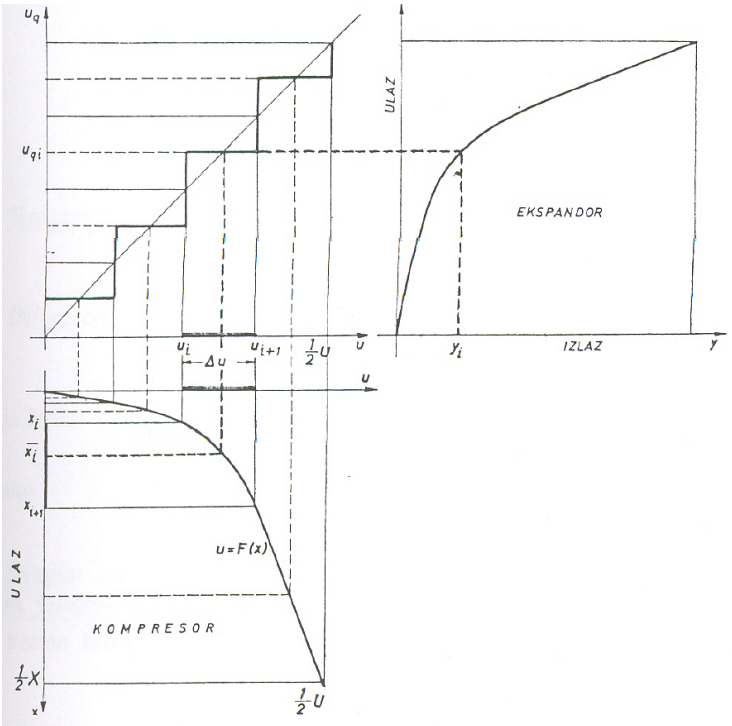
Greška neravnomjerne kvantizacije

Sada se može napisati da je:

$$\overline{u_{Ni}^2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x)\,dx \cong p(\overline{x_i}) \int_{\overline{x_i}-\frac{1}{2}\Delta x_i}^{\overline{x_i}+\frac{1}{2}\Delta x_i} (x - \overline{x_i})^2\,dx = \frac{1}{12}(\Delta x_i)^3\, p(\overline{x_i})$$

Karakteristika kompresora data je izrazom *u = F(x)*. Diferenciranjem ovog izraza dobija se: *du = F'(x)dx*

Ako je širina koraka kvantizacije dovoljno mala može se napisati da je:



$$\Delta u \cong F'(x)\Delta x$$

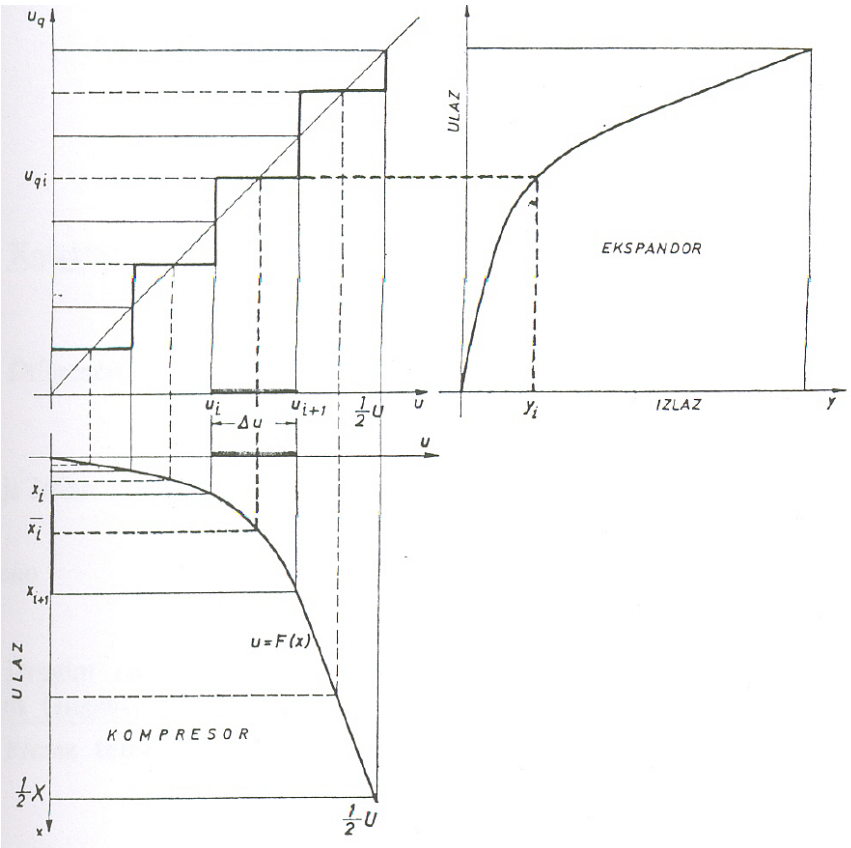
$$\Delta u_i \cong F'(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Greška neravnomjerne kvantizacije

Drugim riječima, funkcija $u = F(x)$, u intervalu $(x_{i+1} - x_i)$ aproksimira se njenom tangentom u tački $x = x_i$.

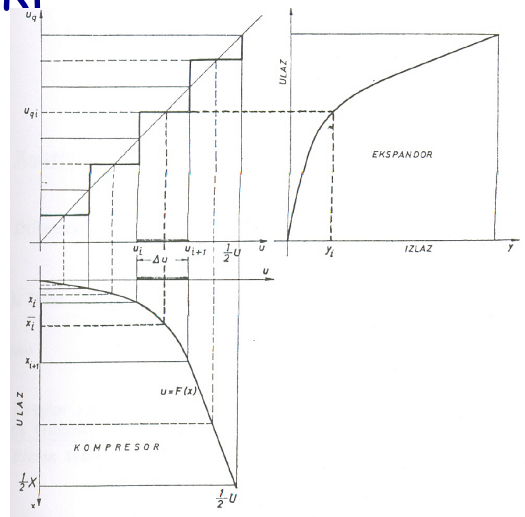
Prema tome:

$$\Delta x_i \cong \frac{\Delta u_i}{F'(\overline{x_i})}$$



Greška neravnomjerne kvantizacije

Ali, kako su koraci kvantizacije Δu_i konstantni i jednaki



$$\Delta u_i = \Delta u = \frac{U}{q} = const$$

to je

$$\Delta x_i \cong \frac{1}{F'\left(\overline{x_i}\right)} \cdot \frac{U}{q}$$

Tako da se dobija:

$$\overline{u_{Ni}^2} \cong \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^3 p\left(\overline{x_i}\right) = \frac{1}{12}\left(\Delta x_i\right)^2 p\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

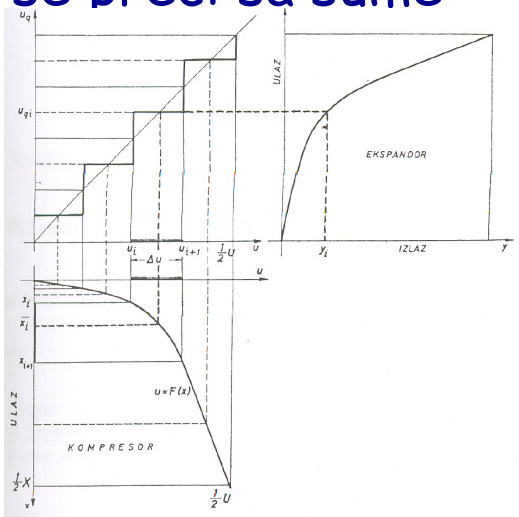
Ukupna srednja kvadratna greška iz svih intervala kojih ima *q*, i koji su numerisani od 0 do *q* - *1*, biće:

$$\overline{u_N^2} = \sum_{i=0}^{q-1}\overline{u_{Ni}^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\sum_{i=o}^{q-1}\frac{p\left(\overline{x_i}\right)}{\left[F'\left(\overline{x_i}\right)\right]^2}\Delta x_i$$

Greška neravnomjerne kvantizacije

Pošto je pretpostavljeno da su intevali Δx_i mali, može se preći sa sume na integral, tako da je:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} \frac{p(x)}{[F'(x)]^2}\,dx$$



Kompresor će se napraviti tako da je

$$x = \frac{1}{2}X, u = \frac{1}{2}U$$

pri čemu je:

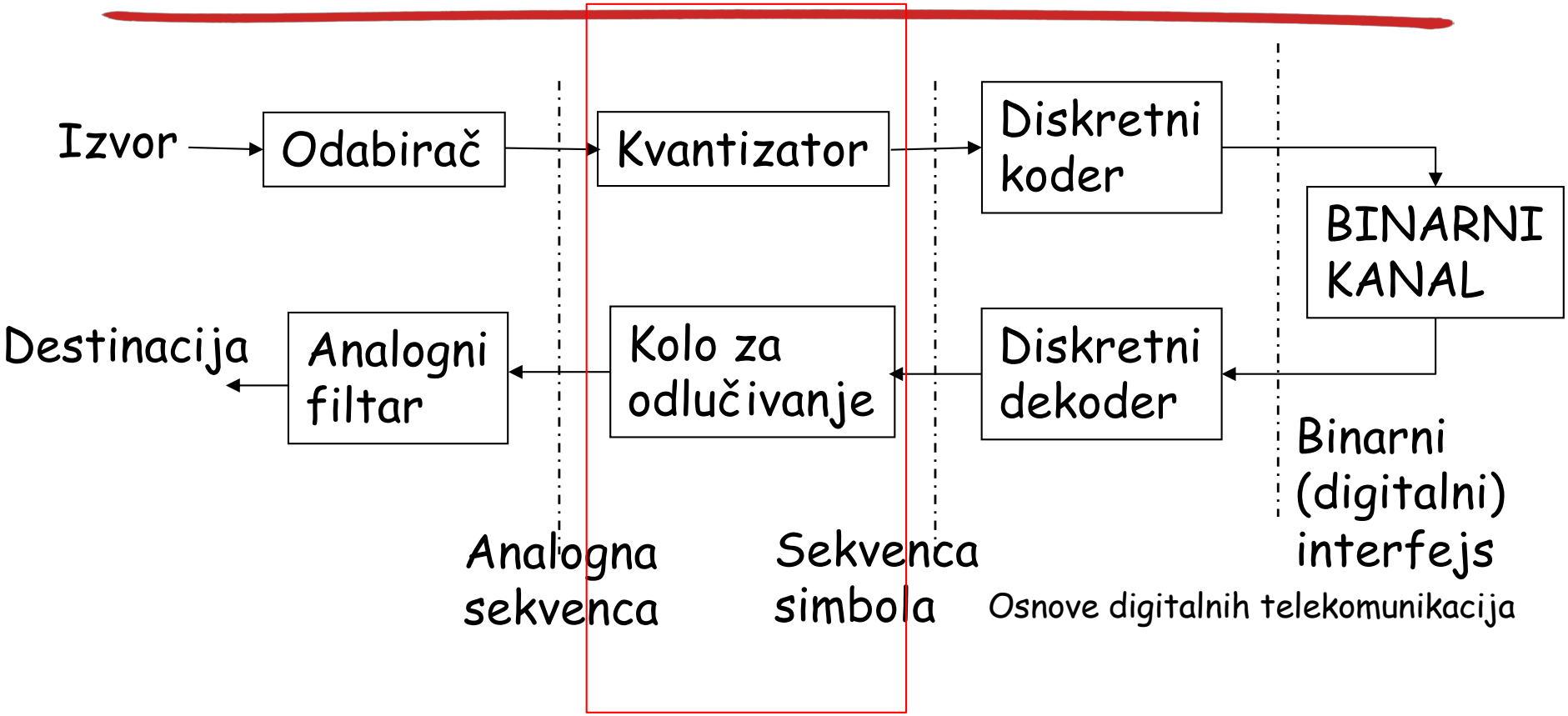
$$\frac{1}{2}X = \frac{1}{2}U$$

Stoga prethodni integral može da se napiše u obliku:

$$\overline{u_N^2} = \frac{1}{12}\frac{U^2}{q^2}\int_{-\frac{U}{2}}^{\frac{U}{2}} \frac{p(x)}{[F'(x)]^2}\,dx$$

Ovaj izraz predstavlja opšti izraz za srednju kvadratnu grešku kvantizacije za neku datu karakteristiku kompresije *u = F(x)*.

Diskretizacija kontinualnog signala po vremenu (zaključak)



Osnove digitalnih telekomunikacija 1-44

Pitanja za usmeni dio kolokvijuma

- Diskretizacija po trenutnim vrijednostima signala (kvantizacija)
- Greška
  - ravnomjerne kvantizacije
  - neravnomjerne kvantizacije